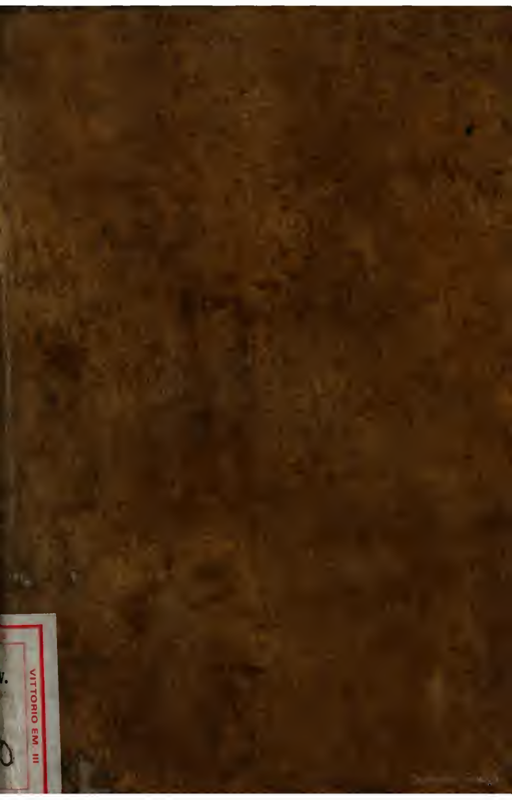

VITTORIO EM. III

# NOUVELLES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS DES DEGRÉS SUPÉRIEURS.



# NOUVELLES
# MÉTHODES
## POUR RÉSOUDRE
# LES ÉQUATIONS
## DES DEGRÉS SUPÉRIEURS.

OUVRAGE CURIEUX, ET TRÈS-UTILE AUX PROFESSEURS ET ÉLÈVES EN MATHÉMATIQUES.

Par M. l'abbé DUMAS, ci-devant professeur de mathématiques au collége de Magnac-Laval.






A RIOM,
CHEZ THIBAUD, IMPRIMEUR DU ROI, DE LA COUR ROYALE, ET LIBRAIRE.

1815.

DE L'IMPRIMERIE DE THIBAUD, A RIOM.

# PRÉFACE.

TEL qu'un ruisseau qui, petit dans son origine, se grossit à mesure qu'il s'avance, par les nouveaux courans qu'il reçoit dans son lit, et devient bientôt un grand fleuve, ainsi les mathématiques furent d'abord réduites à des connoissances très-bornées; mais les progrès qu'elles ont faits dans les différens siècles, par le travail des analistes et des géomètres, ont été si grands, que cette science, la plus exacte de toutes les autres, est devenue aussi la plus abondante dans ses matières, et la plus intéressante dans ses applications.

Quoique les savans qui l'ont cultivée aient poussé très-loin leurs découvertes, ils ont été obligés de convenir qu'ils laissoient un grand vide dans bien des matières.

En lisant plusieurs bons ouvrages de mathématiques, je trouvai que la résolution des

équations des degrés supérieurs étoit une des parties les plus épineuses et les plus imparfaites. En effet, la manière dont les auteurs ont procédé pour trouver la racine de ces équations, est si longue et si compliquée, qu'on est rebuté, à la première vue, des difficultés qui se présentent. Je conçus le dessein de faire un essai qui pût contribuer aux progrès de la science. Le succès dont mes premières tentatives furent accompagnées, l'avantage réel d'une méthode qui abrégeoit le travail des longues opérations des analistes, et conduisoit directement et sans tâtonnement à la vérité, m'inspiroient du courage et de la confiance.

J'ai donc consacré à ce travail mes momens de loisir. Aux connoissances que j'ai trouvées, sur cette matière, dans les meilleurs auteurs, j'en ai ajouté de nouvelles, qui sont le fruit de mes calculs et de mes considérations particulières. Je ne suis pas, il est vrai, parvenu au point où j'aurois désiré; mais un autre, plus

oisif, continuera et perfectionnera le travail que je n'ai pu qu'ébaucher.

J'ai divisé mon petit ouvrage en trois parties, qui ont toutes pour objet principal la recherche des racines dans les équations des degrés supérieurs. Je donne, dans chaque partie, des règles nouvelles qui conduisent à la découverte de ces racines; et, à mesure que j'avance, je m'applique à simplifier les règles précédentes, par des modifications plus simples et plus propres à abréger les calculs.

Quoique j'aie cru pouvoir omettre tout ce qui appartient aux premiers élémens de l'analise, je mets cependant ce que le lecteur ne trouveroit point ailleurs, ou ce qu'il lui seroit incommode de chercher dans d'autres livres, pour voir l'enchaînement des propositions.

La première partie lui présentera plusieurs vérités qui n'ont été proposées, que je sache, par aucun auteur. Dans l'équation $x^3 - px + q = 0$, je démontre, d'une ma-

nière toute nouvelle, l'existence de trois racines réelles, lorsque $27q^2$ est plus petit que $4p^3$ : cette démonstration très-courte, indépendante des séries, est fondée sur une nouvelle proposition qui fixe, d'une manière invariable, les deux nombres entre lesquels on trouve, dans ce cas, une des racines positives de cette équation. Je donne aussi une méthode pour trouver, sans tâtonnement, les valeurs approchées en nombre entier de la seconde racine positive et de la racine négative de la même équation. Le nombre entier qui entre dans cette racine étant connu, on forme, par la substitution, une série convergente, et qui conduit à la valeur totale de la racine, poussée jusqu'à autant de décimales qu'on désire.

Je résous ensuite les équations du quatrième degré, par la voie connue de la décomposition; je détermine, pour toutes les équations en général, le nombre des racines que doit avoir la réduite.

Tout le chapitre qui traite des équations du cinquième degré, renferme d'autres vérités d'autant plus intéressantes qu'elles pourront conduire, dans la suite, à de nouvelles inventions.

Dans la seconde partie, je considère une équation comme étant une série qui manque des termes qui devroient être après celui où $x$ est élevée à la plus haute puissance : je donne donc quelques notions sur les séries en général. La formule du binôme me conduit à la formation des séries, qui sont employées avec avantage à la résolution des équations.

Ayant enseigné les mathématiques à des jeunes gens qui, à cause de leur âge ou de la lenteur de leur esprit, ne saisissoient que difficilement la démonstration que l'on donne le plus communément de la formule du binôme de Newton, laquelle est fondée sur les combinaisons, je fus tenté de chercher une nouvelle manière de le démontrer qui fût plus à leur portée. Charmé de la simplicité et de

l'esprit d'invention de la méthode des coefficiens indéterminés, j'imaginai de la faire servir à la démonstration des coefficiens de la série équivalente au binôme $\overline{a+b}^{n}$. La formule générale de la série $a^n + n a^{n-1} b +$, etc., conduit à plusieurs découvertes intéressantes : par le moyen de cette formule, et les substitutions les plus simples, nous trouvons que le sinus de l'arc $e$ étant $y$, le sinus de l'arc $n e$ est $ny - n\left(\frac{n^2 - 1}{2.3}\right)y^3 +$, etc.

En réfléchissant attentivement sur cette expression, on est porté à croire que le sinus de l'arc $\frac{e}{n}$ pourroit bien être évalué par une expression semblable : on emploie, pour s'en assurer, la méthode inverse des séries, et on trouve que $\sin \frac{e}{n} = \frac{y}{n} - \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)}{2.3} y^3 +$, etc.

Comme dans une équation du troisième degré, la valeur de l'inconnue $x$ est égale au

sinus du tiers d'un arc connu et déterminé par les données de l'équation, il suit que l'inconnue $x$ peut être évaluée par les séries.

J'applique donc avec succès la méthode des séries aux équations du troisième et du cinquième degré : en faisant cette application, je trouve des séries imaginaires, c'est-à-dire, des séries qui représentent des quantités impossibles.

Dans ce cas, par un tour de calcul particulier aux séries imaginaires, on en substitue de réelles qui sont convergentes, et qui conduisent, par une voie assez courte, à la vraie valeur de l'inconnue.

Les séries qui servent à l'évaluation de l'inconnue, dans une équation, offrent aux analistes des calculs rebutans. Il étoit avantageux qu'on trouvât un moyen plus facile pour sommer ces séries. Les fractions continues sont employées utilement dans la troisième partie de cet ouvrage, pour abréger les cal-

culs et diminuer le nombre des opérations : ces sortes de fractions peuvent fournir des formules pour sommer toute espèce de séries ; je ne les applique qu'à celles qui proviennent des équations. Mes occupations ne me permettent pas de détailler tous les usages auxquels elles pourront être employées dans la suite ; d'autres, plus oisifs que moi, s'appliqueront à étendre l'usage des formules que j'appliquerai ici à la résolution des équations, et que je me contenterai d'indiquer pour les autres cas.

Après avoir démontré les propriétés générales des fractions continues, j'expose le moyen usité jusqu'à présent, de changer une série quelconque en fraction continue ; c'est celui qui est proposé par Euler, *in Analysim infinitorum*. Par la méthode de ce grand géomètre, on trouve la fraction continue qui contient réellement la valeur de la série donnée.

Mais cette fraction continue ne peut être

réduite en une fraction algébrique ordinaire; et lorsqu'on veut essayer cette réduction, on est ramené à la première série. Il étoit à propos de trouver une nouvelle manière de transformer la série en fraction continue, et de donner à celle-ci une telle forme, qu'elle pût être ramenée à une fraction ordinaire algébrique, contenant la valeur de la série : c'est ce que j'ai fait dans cet ouvrage. C'est un objet qui mérite l'attention du lecteur; et quand il aura bien conçu la manière dont il faut procéder dans cette opération, il verra que ce moyen abrége beaucoup le calcul de la sommation des séries.

Dans la résolution des équations du cinquième degré, nous démontrons que ces équations, et toutes les autres de degré impair, ont au moins une racine réelle de signe contraire à leur dernier terme. Si donc on affecte l'inconnue du signe qu'elle doit avoir; si on égale cette inconnue à une quantité déterminée par les premiers termes de la série

inverse déduite de l'équation donnée, plus à une autre quantité inconnue, on a, pour la nouvelle inconnue, une autre série qui est réelle. La série réelle est-elle divergente? la méthode des substitutions fait connoître le nombre entier qui contient la valeur approchée de $x$. Après cela, nous employons la substitution des parties décimales. Cette substitution, aussi courte que les autres, a de plus l'avantage de faire connoître immédiatement de combien on est avancé dans la découverte de la vérité, et les nombres à essayer dans chaque équation suivante: en suivant toujours la même marche, le calculateur est bientôt arrivé à une série convergente.

Ce court exposé suffira pour donner à mon lecteur une légère idée des matières qui intéressent le plus dans ce livre.

Toutes les vérités ont été découvertes en m'exerçant sur les problèmes dont la solution me présentoit une utilité réelle. Il y a une telle uniformité dans les démonstrations, qu'il ne

faut pas une grande mémoire pour retenir tous les raisonnemens qui conduisent aux différentes conclusions.

L'ouvrage que j'offre à la curiosité des savans, manque, je l'avoue, de plusieurs choses qui auroient dû être traitées dans le même livre : mais ce n'est qu'un essai ; s'il est bien accueilli, j'y ajouterai plusieurs supplémens qui le rendront plus complet.

---



# NOUVELLES
# MÉTHODES
## POUR RÉSOUDRE
# LES ÉQUATIONS
## DES DEGRÉS SUPÉRIEURS.

## PREMIÈRE PARTIE.

*Résolutions des équations des degrés supérieurs, par les voies ordinaires de l'analise.*

### CHAPITRE Ier.

*Equation du second degré.*

1. ON appelle équation d'un degré supérieur, une équation composée du produit de plusieurs équations linéaires multipliées les unes par les autres.

2. Une puissance étant proposée à résoudre, pour la décomposer il en faut trouver les racines; pareillement, si l'on proposoit de résoudre ou de

décomposer une équation composée, il faudroit trouver les équations linéaires qui la composent ou qui en sont les facteurs, que l'on appelle aussi racines.

La différence entre une puissance et une équation composée, est que dans celle-là toutes les racines sont égales; au lieu qu'elles sont inégales, ou du moins elles ne sont pas toutes égales en celle-ci.

C'est par induction que l'on a connu que dans une équation composée, il y a autant de racines que d'unités dans l'exposant du terme où l'inconnue est élevée à la plus haute puissance.

3. Quand on considère soit l'équation $x^2 = a$, soit l'équation $x^2 + 2bx = c$, on voit que dans l'une et dans l'autre il y a pour $x$ deux valeurs : en effet, dans la première $x = + \sqrt{a}$ et $x = - \sqrt{a}$. Que l'on prenne $\sqrt{a}$ en plus ou en moins, et qu'on l'élève au carré, on a toujours $+a = x^2$. Il en est de même pour le cas où l'inconnue est élevée à différens degrés.

En effet, si l'on a l'équation $x^2 + 2bx = c$, il est clair qu'on peut ajouter aux deux membres de cette équation une même quantité sans détruire l'égalité. J'ajoute donc aux deux membres le carré de la moitié du coefficient du terme où $x$ est élevée à la première puissance; j'ai $x^2 + 2bx + b^2 = b^2 + c$; j'opère l'extraction dans le premier membre, je l'indique dans le second; j'ai $x + b = + \sqrt{b^2 + c}$ ..... $x + b = - \sqrt{b^2 + c}$. D'où il suit que dans

toute équation du second degré, on trouve deux racines qui ont chacune la même quantité sous le signe ; et quelqu'expression que l'on substitue dans l'équation $x^2+2bx=c$, on en trouve les conditions remplies.

4. Il est évident que dans l'équation $x^2+2bx=c$, si l'on fait passer tous les termes dans le premier membre, ces termes se détruiront mutuellement, et on aura $x^2+2bx-c=0$. On voit aussi que dans les deux racines trouvées, en faisant passer tous les termes dans le premier membre, on a les deux équations linéaires $x+b-\sqrt{b^2+c}=0$ . . . . . $x+b+\sqrt{b^2+c}=0$. Multipliez ces deux dernières équations l'une par l'autre, vous revenez à l'équation composée $x^2+2bx-c=0$.

( En indiquant cette multiplication, je suppose que le lecteur est instruit de toutes les opérations qui se font sur les radicaux. )

C'est par cette observation et les suivantes que les analistes ont été conduits à cette vérité, qui est un des premiers principes du calcul, que toute équation composée, égalée à zéro, est le produit de plusieurs équations linéaires égales à zéro, multipliées les unes par les autres.

5. Concluez de ce que nous avons dit au n° 3, que, pour résoudre une équation du second degré, il faut observer la règle suivante :

Mettez tous les termes qui renferment l'inconnue dans le premier membre, et ordonnez par rapport à elle; délivrez-la de son coefficient, si au

premier terme elle en a un différent de l'unité; prenez la moitié du coefficient qui affecte l'inconnue linéaire ; élevez cette moitié du coefficient à son carré; ajoutez ce carré aux deux membres de l'équation; extrayez la racine carrée du premier membre, qui est un carré parfait; affectez le second du signe radical, et prenez-le d'abord en plus, ensuite en moins; vous avez les deux racines de l'équation proposée : ou plus brièvement, dans une équation quelconque du second degré, faites la quantité inconnue égale à la moitié du coefficient linéaire, prise avec un signe différent, ± la racine carrée du carré de la moitié de ce même coefficient, et de la quantité connue qui se rencontre dans l'équation.

Nous aurons, dans la suite, plusieurs occasions d'appliquer cette règle à la découverte d'autres vérités très-importantes. Ceux qui seroient curieux de l'appliquer à la solution des problèmes, en trouveront dans presque tous les auteurs.

---

## CHAPITRE II.

### *Equation du troisième degré.*

6. Toute équation du second degré ayant deux valeurs, on a été fondé à croire qu'une équation du troisième degré avoit pareillement plus d'une valeur. De très-simples observations le font aussi voir clairement. En effet,

Considérons, par exemple, l'équation $x^3 = 8$. Tous les nombres qui, élevés au cube, ont donné 8, sont la racine de 8. Or, on en trouve trois : le premier qui se présente de lui-même est 2. $x = 2$ est sans contredit une des racines de l'équation $x^3 = 8$. Pour trouver les autres, je mets toutes les quantités dans le premier membre, et je divise $x^3 - 8$ par $x - 2$. La division de $x^3 - 8$ par $x - 2$, donne $x^2 + 2x + 4 = 0$. Dégagez $x$ dans cette dernière équation, vous avez $x = -1 \pm \sqrt{-3}$. Les trois racines sont donc $x = 2$.... $x = -1 + \sqrt{-3}$.... $x = -1 - \sqrt{-3}$. Quelque quantité que vous preniez en l'élevant au cube, vous avez 8.

7. Ces trois racines ont aussi lieu lorsque l'équation est telle qu'elle renferme, outre le cube de l'inconnue, le carré et la première puissance de cette même inconnue ; ou plus brièvement, lorsqu'elle est de la forme suivante : $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Cette équation a trois racines, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Quel que soit celui de ces trois nombres que l'on substitue, ils remplissent les conditions de l'équation.

Nous devons donc supposer ce principe, qu'une équation du troisième degré a trois racines, comme celle du second en a deux. En général, une équation quelconque donne toujours autant de valeurs pour l'inconnue, qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de cette même inconnue.

8. Représentons à présent une équation du troisième degré par cette formule : $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.

Si je prends trois quantités, $p$, $q$, $r$, de manière que, 1°. $p+q+r=a$, coefficient du second terme; 2°. $pq+pr+rq=b$; 3°. $pqr=c$; $r$, $p$, $q$, sont les trois racines de l'équation. En effet, je multiplie la première équation par $p^2$; la seconde par $p$; j'ai 4°. $p^3+p^2q+p^2r=-ap^2$;

5°. $p^2q+p^2r+pqr=bp$.

Je soustrais la cinquième de la quatrième; il vient

$p^3-pqr=ap^2-bp$.... Or, $pqr=c$;

donc on a $p^3-ap^2+bp-c=0$.

On trouvera de même, et par la même voie,

$q^3-aq^2+bq-c=0$;

$r^3-ar^2+br-c=0$:

donc $p$, $q$, $r$, sont les trois racines de l'équation, puisqu'étant substituées à la place de $x$, elles en remplissent les conditions.

Ainsi nous apprenons par là que le coefficient qui affecte le carré de $x$, égale la somme des trois racines; que le coefficient qui affecte la première puissance de $x$, égale la somme des produits des racines prises deux à deux; enfin, que le dernier terme est formé du produit des trois racines multipliées les unes par les autres.

9. Si l'on suppose $a=0$, c'est-à-dire, si le second terme manque, une des racines est égale à la somme des deux autres racines prises avec un signe contraire, comme il est évident : car alors $p+q+r=0$; d'où $p=-q-r$. Toutes ces vérités se voient aussi clairement, si au lieu de désigner par des lettres les coefficiens de l'incon-

nue, vous les laissez dans l'expression naturelle des nombres.

Ainsi dans l'expression $x^3+2x^2-23x-60=0$, la somme des trois racines est $-2$; la somme de leurs produits multipliés deux à deux est $-23$; le produit des trois racines est $+60$; et il y au coefficient du second terme $+2$, à celui du troisième $-23$; à celui du quatrième $-60$, parce que dans la multiplication des facteurs simples on a fait passer toutes les quantités dans le premier membre. En effet, les trois racines sont $+5$, $-4$, $-3$, ainsi qu'on peut le voir en mettant chacun de ces nombres à la place de $x$ dans l'équation; car chacun réduit le premier membre à zéro. Or, il est évident que la somme de ces trois nombres, c'est-à-dire, $+5$, $-4$, $-3$, est $-2$, ou écrits dans la forme suivante, $x-5=0$, $x+4=0$, $x+3=0$, leur somme égale $+2$; la somme de leur produit deux à deux est $-20$, $-15$, $+12=-23$, et leur produit pris trois à trois est $+60$, etc., etc.

Pareillement, dans l'équation $x^3-19x+30=0$, comme le second terme manque, je conclus qu'il y a des racines positives et des racines négatives, et que la somme des unes est égale à la somme des autres. En effet, les trois racines sont $+2$, $+3$ et $-5$.

10. La propriété qu'a le dernier terme d'étre le produit de toutes les racines, nous présente une vérité remarquable, qui est qu'une équation du troisième degré et d'un degré quelconque, ne peut

certainement avoir d'autre racine rationnelle que des diviseurs du dernier terme ; car puisque ce terme est le produit des trois racines, il faut qu'il soit divisible par chacune d'elles.

Si nous considérons, par exemple, l'équation $x^3 = x + 6$ ou $x^3 - x - 6 = 0$, comme cette équation ne peut avoir d'autre racine rationnelle que des nombres qui sont facteurs du dernier terme, nous n'avons besoin que d'essayer les nombres 1, 2, 3, 6. Le nombre 2 seul substitué à la place de $x$ dans l'équation, la rend égale à zéro : la division fait ensuite trouver, pour les deux autres racines, $x = -1 \pm \sqrt{-2}$.

Nous allons mettre ici une courte méthode pour trouver tous les diviseurs d'un nombre donné.

11. Soit proposé de trouver les diviseurs du nombre 210. On voit d'abord que ce nombre peut être divisé exactement par 2, et que le quotient de cette première division est 105. . . . . 105 est divisible par 3, et donne 35 pour quotient. 35 est divisible par 5, et donne 7 au quotient. On place ces opérations de la manière suivante :

| Dividendes et quotiens. | Diviseurs. |
| --- | --- |
| 210. | 1. |
| 105. | 2. |
| 35. | 3, 6. |
| 7. | 5, 10, 15, 30. |
| 1. | 7, 14, 21, 35, 42, 70, 105, 210. |

C'est-à-dire, qu'il faut diviser un nombre et ensuite ses quotiens par le plus petit nombre possible

au-dessus de l'unité, et ensuite multiplier chaque diviseur qui se présente par tous ceux qui précèdent, on a par là tous les diviseurs du nombre donné. En effet, ces nombres sont des facteurs qui, combinés avec les quotiens, donnent 210, comme on peut le voir sur le tableau que nous venons de former.

12. Les diviseurs du dernier terme font connoître quel nombre on peut essayer pour avoir une racine rationnelle de l'équation. Nous allons maintenant faire une remarque très-importante, qui fera connoître si c'est en plus ou en moins qu'on doit prendre le nombre essayé.

Quand les racines sont toutes positives, alors les signes + et — se succèdent alternativement, et l'équation prend cette forme, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.

Si toutes les racines eussent été négatives, et qu'on eût multiplié entr'eux les trois facteurs $x+p$, $x+q$, $x+r$, tous les termes auroient eu le signe +, et l'équation auroit été de la forme $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

D'après ces observations, et d'après celles qui pourroient se faire en supposant deux racines positives et une négative, ou deux négatives et une positive, on a conclu cette vérité, qu'il y a autant de racines positives que de changemens de signes, et autant de négatives que de successions immédiates de mêmes signes, excepté cependant le cas où il y a des facteurs imaginaires.

13. L'essai des diviseurs ne doit être fait que lorsque le premier terme $x^3$ est multiplié simplement par 1, et que les autres termes de l'équation ont pour coefficiens des nombres entiers. Quand cette condition n'a pas lieu, il faut commencer par une préparation qui consiste à transformer l'équation en une autre qui ait la condition requise; après quoi on fait l'essai comme nous avons dit.

Soit donné, par exemple, l'équation $x^3-3x^2+\frac{11x}{4}-\frac{3}{4}=0$; comme elle renferme des quarts, on fera $x=\frac{y}{2}$. L'équation $x^3$, etc. devient celle-ci: $\frac{y^3}{8}-\frac{3y^2}{4}+\frac{11y}{8}-\frac{3}{4}=0$. En multipliant par 8, il vient $y^3-6y^2+11y-6=0$, dont les racines sont $y=1$, $y=2$, $y=3$; d'où il suit que dans l'équation proposée, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$, $x=\frac{3}{2}$.

14. Lorsque tous les termes qui sont après $x^3$ ont le même dénominateur $m$, il faut faire $x=\frac{y}{m}$; c'est-à-dire, il faut faire cette inconnue égale à une autre inconnue divisée par ce dénominateur. Dans l'exemple précédent, comme le dénominateur 4 ne se trouvoit que dans les deux derniers termes, il suffisoit, comme on a vu, de faire $x=\frac{y}{2}$. Au reste, l'usage apprendra quelle tournure il faut donner au calcul, lorsqu'il y a des fractions

dans l'équation. Nous allons mettre ici les autres transformations, pour n'avoir pas besoin de faire une autre fois une digression sur ce sujet.

15. Il y a la transformation qui se fait par le changement des signes des puissances impaires. Quand on change les signes des termes qui renferment des puissances impaires, les racines positives de cette équation sont changées en négatives, et les négatives en positives; car dans l'équation

$$\begin{aligned} x^3 - px^2 - pqx - pqr &= 0, \\ + qx^2 - prx &, \\ + rx^2 + qrx &, \end{aligned}$$

il y a la racine positive $p$, et deux négatives $q$ et $r$. Or, en changeant les signes du premier et du troisième termes, où $x$ est élevée à une puissance impaire, $p$ devient négatif, et $q$, $r$ positifs; ce qui est évident par le tableau suivant :

$$\left.\begin{aligned} -x^3 - px^2 + pqx - pqr \\ + qx^2 + prx \\ + rx^2 - qrx \end{aligned}\right\} = 0, = \ldots\ldots$$

$$\overline{-x-p} \,.\, \overline{-x+q} \,.\, \overline{-x+r} = 0.$$

16. Il y a enfin la transformation par laquelle on fait disparoître le second terme. Pour cela on substitue à la place de l'inconnue une nouvelle inconnue, augmentée du coefficient du second terme, affectée d'un signe contraire, et divisée par l'exposant du premier terme. Lorsqu'on a $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, il est évident qu'en faisant $x = y + \frac{a}{3}$, le cube d'$y + \frac{a}{3}$ donnera pour second terme

$+ay^2$, et que le carré d'$y+\frac{a}{3}$ aura à son premier terme $y^2$, que l'on devra multiplier par $-a$, ce qui fera $-ay^2$, etc. Par exemple, pour faire disparoître le second terme de l'équation $x^3+6x^2-3x+4=0$, je fais $x=y-\frac{6}{3}$, ou $x=y-2$; en substituant j'aurai

$$\left.\begin{array}{r} y^3-6y^2+12y-8 \\ +6y^2-24y+24 \\ -3y+6 \\ +4 \end{array}\right\}=0;$$ ce qui se réduit à $y^3-15y+26=0$, équation où il n'y a point d'$y^2$.

17. Cette règle est générale pour toutes les équations. Cette transformation peut avoir lieu sur tout autre terme de ceux qui sont entre le premier et le dernier.

Car lorsqu'on a $x^3+ax^2+bx+c=0$, on peut substituer dans cette équation $y+r$ au lieu de $x$; il viendra

$$y^3+\overline{3r+a}\times y^2+\overline{3r^2+2ar+b}\times y+r^3+ar^2+br+c=0,$$

que l'on écrit aussi de cette manière :

$$y^3+\left.\begin{array}{l}3r\\+a\end{array}\right\}y^2+\left.\begin{array}{l}3r^2\\+2ar\\+b\end{array}\right\}y+\begin{array}{l}r^3\\+ar^2\\+br\\+c\end{array}=0.$$

Comme on est le maître de $r$ dans cette équa-

tion, il est aisé de voir qu'on peut, par son moyen, faire évanouïr celui des termes qu'on voudra; mais aussi on n'en sauroit faire disparoître qu'un à la fois.

Si l'on vouloit faire évanouïr le dernier terme, il faudroit faire $r^3+ar^2+br+c=0$, et alors, pour avoir $r$, il faudroit résoudre une équation pareille à la proposée.

18. Lorsqu'on a chassé les fractions d'une équation du troisième degré, suivant la manière enseignée, et qu'aucun des diviseurs du dernier terme ne se trouve être une racine de l'équation, c'est une marque certaine non seulement que l'équation n'a pas de racine en nombre entier, mais qu'une racine fractionnaire même ne peut avoir lieu. En effet, dans l'équation $x^3-7=0$, par exemple, ou $x^3=7$, dans laquelle aucun des diviseurs du dernier terme ne se trouve être une racine de l'équation, cette équation n'a aucune racine en nombre entier ni fractionnaire; car aucun nombre entier ou fractionnaire élevé au cube n'a donné 7; ce qu'il faut dire aussi des équations à plusieurs termes: car un binôme-racine qui auroit eu un terme fractionnaire, auroit nécessairement donné dans le produit quelque terme fractionnaire; ce qui est contre la supposition par laquelle on suppose qu'on a fait évanouïr toutes les fractions de l'équation proposée.

Comme dans ce cas les racines de l'équation ne sont ni des nombres entiers, ni des fractions, elles sont irrationnelles ou imaginaires. Or, la manière

de les exprimer fait un point très-important de l'analise que nous allons traiter.

19. Pour résoudre une équation du troisième degré, on commencera par en faire évanouïr le second terme ; ce qui donnera une équation semblable à celle-ci :

1°. $x^3+px+q=0$. Cela posé, je fais

2°. $x=y+z$ : donc

3°. $x^3=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$.

Or, j'observe que dans le second membre de cette équation, les deux termes $3y^2z+3yz^2=\ldots$ $3yz\times\overline{y+z}$ ; par conséquent,

4°. $x^3=3xyz+y^3+z^3$ ; j'aurai donc

5°. $x^3+px+q=x^3-3xyz-y^3-z^3$,

6°. $\left.\begin{array}{l} x^3+px \quad +q \\ -x^3+3yzx+y^3+z^3 \end{array}\right\}=0$ ; d'où je tire

7°. $3yz+p=0$.

8°. $y^3+z^3+q=0$, de la septième équation suit évidemment $y=-\frac{p}{3z}$ ; d'où

9°. $y^3=-\frac{p^3}{27z^3}$.

Prenant la valeur d'$y^3$ dans la huitième équation, la comparant avec celle-ci, on a

10°. $z^3+q=\frac{p^3}{27z^3}$ ;

11°. $z^6+qz^3=\frac{p^3}{27}$.

Cette équation est du sixième degré ; mais elle se résout par la méthode du second, et donne

$$12^{o}.\ z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

En substituant cette valeur dans la huitième équation, on a

$$13^{o}.\ y^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} : \text{donc}$$

$$14^{o}.\ z + y = x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}};$$

car pour $z$ il faut mettre un radical de signe contraire.

20. A la vue de cette valeur générale de $x$, on ne croiroit pas qu'il fût possible d'en tirer trois racines pour l'équation $x^3 + px + q = 0$. Mais si l'on divise cette équation par le facteur trouvé, $x - y - z = 0$, on trouvera que le quotient est une équation du second degré, laquelle, à son tour, se décompose facilement en ses deux facteurs. En effet, je divise la quatrième équation $x^3 - 3xyz - y^3 - z^3 = 0$, par $x - y - z = 0$; le quotient exact est $x^2 + xy + xz + y^2 - yz + z^2 = 0$, équation du second degré, qui donnera pour les deux autres valeurs de l'inconnue,

$$15^{o}.\ x = \left(\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$+\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}};$$

16°. $$x=\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$+\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

21. Or, cette double formule donne deux valeurs imaginaires de $x$ toutes les fois que $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ est une quantité réelle, et deux valeurs réelles quand le même radical est imaginaire.

Pour le premier cas, il est évident que les deux radicaux contenant des quantités réelles, et que le premier radical cubique ne contenant pas des quantités égales au second, les coefficiens de signes contraires $+\sqrt{-3}$, $-\sqrt{-3}$ ne pourront pas se détruire; ainsi il restera de l'imaginaire dans chacune de ces deux valeurs de $x$ : il n'y a donc alors que la première valeur de $x$ qui soit réelle.

La seconde partie se démontre facilement de la manière suivante, indépendamment des séries. En effet, dans l'équation $x^3-px+q=0$, toutes les fois qu'on a la quantité $\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}$, ou celle-ci, $27q^2-4p^3$ négative, l'équation a une racine positive qui est entre $+\frac{q}{p}$ et $+\frac{3q}{2p}$; car substituez

successivement ces deux quantités algébriques avec le signe +, la première substitution donne +, et la seconde le signe —. Nous démontrerons bientôt ce que nous supposons ici, que lorsqu'on trouve deux quantités telles qu'étant substituées successivement à la place de l'inconnue d'une équation, elles donnent des résultats de signe contraire, l'équation a nécessairement une racine de même signe que celui qu'on a pris dans la substitution, laquelle racine se trouve entre les quantités substituées.

Soit cette racine égale à $+a$, de manière qu'on ait $x-a=0$, on aura les deux autres racines en divisant $x^3-px+q$ par $x-a$. Le quotient donne $x^2+ax+a^2-p=0$ : d'où $x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{p-\frac{3a^2}{4}}$. Mais $a^2-p=\frac{-q}{+a}$ ; donc on a $p>a^2$ ; donc, à plus forte raison, $p>\frac{3a^2}{4}$ ; donc le radical est réel ; donc, dans ce cas, toutes les racines sont réelles. Nous donnerons, dans la troisième partie, des formules par lesquelles on peut, sans aucun tâtonnement, trouver facilement ces trois racines. Indépendamment de ces formules et des séries, nous indiquerons bientôt un autre moyen pour éviter le tâtonnement.

22. En considérant la quatorzième équation du n° 19, qui contient la première valeur de $x$ dans l'équation $x^3+px+q=0$, on voit que le radical carré étant négatif, cas où toutes les racines sont

essentiellement réelles, il n'est pas possible de tirer la valeur numérique de $x$ par la simple substitution des coefficiens. C'est cette difficulté que les analistes désignent par le nom de cas irréductible.

Cette difficulté n'a pas lieu dans le cas où le radical carré est réel. Nous allons résoudre une équation de ce genre, par la formule de l'équation 14$^e$ du n° 19.

23. Supposons l'équation $x^3+17x-46=0$. Nous avons trouvé pour première valeur de $x$, dans l'équation $x^3+px+q=0$,

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Or, dans le cas proposé, $p=17$, $q=-46$.... donc

$p^3=4913$ ..... $-\frac{q}{2}=+23$, $+\frac{q^2}{4}=529$ :

donc $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=\sqrt{\frac{19196}{27}}$. Extrayant successivement la racine carrée du numérateur et du dénominateur, on trouve $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=\frac{138,549630096943}{5,196152422706}$ $=26,663888744200$ ......... d'où il suit que

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{49,663888744200},$$

et $$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-3,663888744200}.$$

L'extract. du cube positif donne $+3,675757968987$;

celle du cube négatif donne — 1,54163215648 : donc $x = 2,134125817339$.

24. On auroit eu le même résultat par la méthode de Newton. Quand la première valeur de $x$ est connue, il est facile d'avoir les deux autres, soit qu'elles soient réelles ou imaginaires : pour cela on n'a qu'à diviser l'équation donnée par la racine déjà trouvée. Cette division faite avec d'autant plus d'exactitude que la valeur de $x$ sera plus approchée, abaissera l'équation d'un degré, et la nouvelle équation se résoudra par les régles données au chapitre précédent.

25. Lorsque $p$ est négatif, et $\frac{p^3}{27}$ est plus grand que $\frac{q^2}{4}$, alors l'équation a trois racines. Pour les connoître, on ne peut employer l'extraction indiquée par les formules ci-dessus ; il faut avoir recours à d'autres moyens. Nous en emploîrons deux qui sont aussi aisés et aussi courts que la double extration qui est indiquée au nº 19, équation 14ᵉ.

Nous ne proposerons ici que le premier, qui est celui que nous fournit la méthode de Newton.

26. Cette méthode exige une préparation que nous avons trouvé le moyen d'abréger. Si cette méthode n'est pas toujours exacte dans les autres cas, une démonstration simple nous fera voir que dans celui du cas irréductible elle ne peut être sujette à aucune erreur. Avant d'exposer cette méthode, nous allons démontrer une vérité que nous avons supposée au nº 21.

27. Quelqu'équation que l'on ait, si l'on trouve deux nombres tous deux positifs ou tous deux négatifs, qui, substitués dans l'équation, donnent deux résultats dont l'un soit en plus et l'autre en moins, il y aura toujours une racine de l'équation qui sera comprise entre ces deux nombres qui ont donné ces deux résultats. Cela est facile à voir dans l'équation $x^2 - 20 = 0$. Les nombres $+4$ et $+5$, substitués successivement dans l'équation, donnent des résultats de signe contraire, et la véritable racine se trouve entre ces deux nombres. On le démontre d'une manière plus générale de la manière suivante. Si l'on substitue deux nombres de même signe, l'un inférieur, l'autre excédant la vraie valeur de $x$, on doit avoir des résultats de signe contraire; car dans l'équation formée de $(x-a)(x-b)(x-c)$, où on suppose $a$ être la plus petite valeur de $x$, $b$ et $c$ des valeurs plus grandes, si à la place de $x$ nous substituons d'abord $+e$ inférieur à $a$, et ensuite $+E$ supérieur à $a$; dans le premier cas, ce facteur devient négatif; dans le second, il est positif; dans les deux cas, les autres facteurs $(x-b)(x-c)$ conservent le même signe. Donc, puisqu'il n'y a que le facteur $x-a$ qui change de signe, le produit total changera de signe par la substitution de deux quantités, l'une plus grande, l'autre plus petite que la véritable. On démontreroit la même chose, si le plus petit facteur, au lieu d'être $x-a$, étoit $x+a$, mais en substituant deux nombres tous deux négatifs.

*Nota.* Remarquez que dans une équation quel-

conque, lorsque deux nombres substitués à la place de $x$ donnent des résultats de même signe, il ne faut pas en conclure que l'équation n'a point de racine entre ces deux nombres; car, par exemple, dans les équations de la forme $x^3 - px + q = 0$, où on suppose $4p^3 > 27q^2$, les quantités $+\frac{q}{p}$ et $+p^{\frac{1}{2}}$, substituées dans l'équation, donnent des résultats de même signe; et cependant il y a entre ces deux quantités deux racines positives, comme nous allons le voir.

28. La préparation à la méthode newtonienne exige qu'on ait déterminé deux limites en nombres entiers entre lesquels la vraie valeur de $x$ se trouve.

Nous avons vu que dans l'équation $x^3 - px + q = 0$, lorsqu'elle se trouve être du cas irréductible, il y a,

1°. Une racine positive qui se trouve entre $+\frac{q}{p}$ et $+\frac{3q}{2p}$.

2°. La seconde racine positive se trouve entre $+\frac{3q}{2p}$ et $p^{\frac{1}{2}}$; car substituez successivement $+\frac{3q}{2p}$ et $+p^{\frac{1}{2}}$, la première substitution donne un résultat négatif, et la seconde un résultat positif.

29. Cela posé, nous allons faire l'application de la méthode newtonienne à l'équation suivante, qui est du cas irréductible. On demande les trois racines approchées de l'équation $x^3 - 4x + 2 = 0$.

La plus petite valeur de $x$, n° 21, est entre $\frac{2}{4}$ et $\frac{6}{8}$, et par conséquent entre $\frac{4}{8}$ et $\frac{6}{8}$. Puisque $\frac{4}{8}$ est la première valeur approchée de $x$, je fais $x = 0,5 + z'$. Je détermine par cette équation le cube de $x$; mais dans la détermination de ce cube j'observe que 0,5 étant la première valeur approchée de $x$, $z'$ est une fraction de 0,5, et par conséquent ne peut être que des centièmes; son carré ne représentera que des millièmes, et son cube des dix-millièmes : donc, puisque dans cette première opération je ne veux avoir que des centièmes, je peux négliger les $z'^2$ et les $z'^3$. Afin donc de ne pas faire des calculs inutiles, je n'admettrai, dans la formation du cube de $0,5 + z'$, que les deux premiers termes, c'est-à-dire, le cube de 0,5, et le triple carré de 0,5 par $z'$. Je reprends l'équation donnée; j'ai donc,

1°. $x^3 - 4x + 2 = 0$. Or,

2°. $x = 0,5 + z'$ : donc $x^3 = 0,125 + 0,75z'$.

Je substitue ces valeurs dans l'équation donnée, j'ai

3°. $0,125 + 0,75z' - 2,0 - 4z' + 2 = 0$; je fais la réduction, j'ai $z' = \frac{0,125}{3,25} = 0,03$.

Je ne pousse pas la division plus loin, parce que le chiffre que je pourrois trouver après 3 pourroit être fautif, en ce qu'il manqueroit les millièmes provenant de $z^2$, que j'ai négligés. Je transporte cette seconde valeur dans la seconde équation, j'ai $x = 0,53$.

Pour avoir une valeur plus approchée, je fais

4°. $x=0,53+z''$ .... $z''$ désignant les décimales à ajouter à 0,53, j'opère comme ci-dessus, j'ai

5°. $0,148877+0,8427z''-2,12-4z''+2=0$;

Et 6°. $z''=\frac{-0,028877}{-3,1573}=0,0091$,

quantité dans laquelle je ne pousse la division que jusqu'à deux chiffres significatifs seulement. En général, il ne faut la pousser que jusqu'à autant de chiffres significatifs (y compris le premier qu'on trouve) qu'il y a de place entre celui-ci et la virgule ou le point de séparation des décimales et des unités. Ici, dans le quotient 0,0091, entre 9 qui est le premier chiffre significatif du quotient actuel, et la virgule, il y a deux places; je m'arrête donc au second chiffre significatif 1.

Je substitue cette valeur de l'équation 6ᵉ dans l'équation 4ᵉ; j'ai $x=0,5391$; je fais

7°. $x=0,5391+z'''$. Je fais les mêmes opérations que ci-dessus; je trouve

$0,15667799147I+0,87188643z'''$ .........

$-2,1564-4z'''+2=0$.

8°. $z'''=\frac{0,000277991471}{3,12811357}=0,00008887$.

Je substitue cette valeur dans la septième équation, j'ai

9°. $x=0,53918887$. S'il falloit une valeur plus approchée, je ferois $x=0,53918887+z''''$; j'opérerois comme ci-dessus, et j'aurois une valeur de $x$ poussée jusqu'à 16 décimales.

Le dernier chiffre tout au plus du quotient de la dernière division peut errer de quelques unités; c'est pourquoi, l'opération finie, il peut être laissé.

30. On voit que cette méthode est aussi courte et facile que la voie des deux extractions qui peuvent être faites lorsque le radical carré n'est pas imaginaire. Reste à démontrer que la méthode de Newton est toujours exacte dans le cas où l'équation a trois racines réelles.

Pour le démontrer, j'appelle $a$ la valeur approchée d'une des racines de l'équation, et $r$ la quantité qui y doit être ajoutée. Maintenant il est clair que la bonté de la méthode dépend de cette condition, que si $a$ est une valeur approchée d'une des racines de l'équation proposée, $a+r$ soit une valeur plus approchée de la même racine : or, c'est ce qui a toujours lieu dans le cas irréductible. Pourvu que dans la recherche de la plus petite racine positive, on prenne pour première valeur approchée une quantité plus petite que la plus petite racine, et que dans la recherche de la plus grande racine positive, on prenne pour première valeur approchée une quantité plus grande que la plus grande des racines, toutes les valeurs corrigées seront, dans le premier cas, plus petites que la plus petite des racines positives, et, dans le second cas, plus grandes que la plus grande des racines positives, en s'avançant cependant toujours, dans les deux cas, vers la vraie valeur de $x$. En effet, toute équation peut être ramenée à la forme suivante :

$(x-u)\,(x-y)\,(x-z)=0$ ; je substitue $a+r$ à la place de $x$, j'ai

$$(r+a-u)\,(r+a-y)\,(r+a-z)=0.$$

Dans la recherche de la plus petite racine, où on prend $a$ plus petit que les autres racines, $a-u$, $a-y$, $a-z$ restent négatifs : donc les racines en $r$ sont positives. De plus, ces racines doivent, dans l'opération, se trouver moindres qu'$a$, autrement $a$ ne seroit point la première valeur approchée : donc, jointes à $a$, elles doivent l'augmenter, et faire avancer la quantité déjà trouvée vers la vraie valeur de $x$. Dans la recherche de la plus grande racine, où on prend $a$ plus grand qu'$u$, $y$, $z$, les binômes $a-u$, $a-y$, $a-z$ sont positifs : donc les racines en $r$ sont négatives; donc elles doivent être soustraites d'$a$, et par conséquent la faire avancer vers la vraie valeur.

31. Reprenons l'équation $x^3-4x+2=0$.

Suivant le n° 28, la plus grande racine positive est entre $\frac{3q}{2p}$ et $+p^{\frac{1}{2}}$, et par conséquent je puis faire,

1°. $x=2+z'$. Je substitue dans l'équation; je trouve $8+12z'-8-4z'+2=0$ : d'où

2°. $z'=-\frac{2}{8}=-0,2$ : d'où $x=1,8$. Je fais,

3°. $x=1,8+z''$; j'opère comme ci-dessus, et je trouve $z''=-0,11$ : donc

4°. $x=1,69$. Je fais $x=1,69+z'''$. Par une opération semblable aux précédentes, on trouve $z'''=-0,0146$, et par conséquent,

5°. $x = 1{,}6754$. Je fais $x = 1{,}6754 + z''''$ ; je trouve $z'''' = -0{,}00026904$, et par conséquent $x = 1{,}67513096$. En employant une cinquième correction, on trouve $z''''' = 0{,}0000000894$, etc., et par conséquent $x = 1{,}67513087$.

En procédant de la sorte, on peut, dans chaque valeur corrigée, prendre pour $z'$, $z''$, $z'''$, etc. au quotient de la division, autant de chiffres significatifs qu'il y en a dans la valeur approchée qu'on a déjà : toute l'erreur qui peut résulter de cette division est bientôt corrigée par l'opération suivante ; et en négligeant les deux derniers chiffres de la dernière correction, on n'est exposé à aucune erreur.

*Nota*. Quand on est arrivé à une valeur approchée, qui comprend déjà trois ou quatre décimales, on doit prendre les chiffres qu'on voit appartenir à la véritable valeur de $x$, et faire comme au numéro précédent ; l'opération est plus aisée et plus courte.

32. Nous allons maintenant exposer comment on peut, sans tâtonnement, connoître la valeur approchée de la racine négative de l'équation $x^3 - px + q = 0$, dans le cas où cette équation a trois racines réelles.

Soit l'équation $x^3 - 5x + 3$. On demande quel est le chiffre en nombre entier qui exprime la valeur approchée de la racine négative renfermée dans cette équation.

| | | |
|---|---|---|
| $p$ | | $q$ |
| 5 | | 3 |
| 4 | 9 | 16 |
| 2 | 3 | 4 |

Solution. Prenez le plus grand carré contenu dans $p$, ici dans 5, écrivez-le au-dessous de 5, et sa racine au-dessous; puis écrivez, avec leur racine au-dessous, les carrés des nombres qui suivent dans l'ordre naturel celui que vous venez de mettre au-dessous de $p$; prenez la différence de ces carrés à 5, multipliez-la par la racine au-dessous; voyez quel est le carré dont la différence à $p$, multipliée par la racine de ce même carré, donne un produit plus grand que $q$. Ce n'est pas la racine carrée de ce nombre carré qui est le premier chiffre de la racine négative, c'est l'autre racine qui précède immédiatement celle-ci. Ainsi, dans l'exemple proposé, la différence de 9 à 5 est 4; 4 multiplié par $3 = 12 >$ que 3 ou $q$; d'où je conclus que le premier chiffre de la racine négative n'est pas 3, mais le chiffre 2 qui le précède.

Dem. J'appelle $a^2$ le plus grand carré contenu dans $p$, $d$ la différence de $p$ à $a^2$, $a^2+d=p$; $-p=-a^2-d$. Je suppose $x=-a$, je le substitue dans l'équation, j'ai $-a^3+a^3+ad+q=0$: donc $a$, racine du plus grand carré contenu dans 5, prise négativement, ne détruisant pas les quantités positives, est trop foible.

Supposons que le carré qui est immédiatement dans les nombres naturels après $p$, soit désigné par $A^2$, et sa différence à $p$ par D, j'aurai $A^2-D=p$. Je suppose $x=-A$, j'aurai $-A^3+A^3-AD+q=0$, équation où l'on voit que le produit formé de la différence à $p$ d'un carré qui surpasse $p$, par la racine de ce même carré, étant plus grand que $q$,

donne un résultat négatif; par conséquent alors le nombre supposé est trop grand.

Il suit de là que dans l'équation $x^3-5x+3=0$, le premier chiffre de la racine négative est $x=-2$. Pour trouver les décimales qui doivent être après $-2$, on doit opérer comme au n° 29.

33. Je reviens à l'équation $x^3-4x+2=0$, dont je vais chercher la racine négative qui servira de preuve aux deux autres racines déjà trouvées.

Suivant la règle déjà donnée, j'observe que le chiffre en nombre entier qui représente la valeur approchée de la racine négative de cette équation est $-2$. Je considère cette racine comme positive, en changeant les signes de $x^3$, $4x$, et j'ai l'équation $x^3-4x-2=0$ à résoudre, et $x=2+z'$. Je trouve par le calcul $z'=0,2$ ; je fais donc $x=2,2+z''$. En opérant je trouve $z''=0,014$ ; d'où $x=2,214$. Je fais $x=2,214+z'''$ ; je trouve $z'''=0,000319$, et enfin $z''''=0,00000074$, et par conséquent $x=2,21431974$. Prenez la valeur de cette racine négativement, comme cela doit être, et vous verrez qu'étant d'ailleurs égale à la somme des deux autres racines, elle remplit la condition de l'équation, par laquelle la somme des trois racines doit être égale à zéro.

34. Les règles que nous venons de donner sont fondées sur ce que $4p^3 >$ que $27q^2$. Si l'on avoit $4p^3=27q^2$, alors le radical carré seroit égal à zéro, et l'équation auroit deux racines égales ; car une équation du troisième degré de cette nature peut être représentée par

$(x-a)\ (x-a)\ (x+2a)=0$, ou par $x^3-3a^2x+2a^3=0$, équation où $4p^3=27q^2$. Dans ce cas, le radical carré disparoît, et l'extraction de la racine cubique fait de suite connoître les trois racines. Ainsi, par exemple, dans l'équation

$x^3-3x+2=0$, ou $4p^3=27q^2$ $x=-\sqrt[3]{\frac{2}{2}}-\sqrt[3]{\frac{2}{2}}$,

on a $x=-2$; d'où $x+2=0$; d'où $x-1=0$. . . $x-1=0$.

---

# CHAPITRE III.

*Equation du quatrième degré.*

35. SUPPOSONS que nous ayons l'équation $x^4=2401$; on aura d'abord $x^2=49$, et ensuite $x=7$.

Au premier abord il ne paroît y avoir qu'une racine à cette équation, et cependant, puisqu'on trouve toujours trois racines pour une équation du troisième degré, on soupçonne justement que quatre racines ont lieu. En effet, il est évident que $+7$ et $-7$ sont deux racines carrées carrées: $+\sqrt{-49}$, $-\sqrt{-49}$ sont les deux autres racines carrées carrées: toutes les quatre donnent $+2401$.

On peut voir aussi, d'une manière aisée, que l'équation $x^4+fx^2+g=0$ a quatre racines;

Car d'après les règles données pour un équation du second degré, il suit qu'on a

1°. $x^4+fx^2+\frac{f^2}{4}=\frac{f^2}{4}-g.$

2°. $x^2+\frac{f}{2}=+\sqrt{\frac{f^2}{4}-g}$ | $x^2=-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}-g}.$

3°. $x^2+\frac{f}{2}=-\sqrt{\frac{f^2}{4}-g}$ | $x^2=-\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{f^2}{4}-g}.$

4°. $x=\pm\sqrt{-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{f^2}{4}-g}}.$

5°. $x=\pm\sqrt{-\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{f^2}{4}-g}}.$

36. Soit à présent l'équation $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$. Cette équation a quatre racines, et peut par conséquent être représentée par $(x+p)(x+q)(x+r)(x+s)=0$; $p$, $q$, $r$, $s$ désignant les quatre racines de l'équation proposée.

Si on opère la multiplication des quatre binômes les uns par les autres, on a l'équation suivante, égale terme par terme à la proposée.

$$x^4 \left.\begin{matrix}+p\\+q\\+r\\+s\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}+pq\\+pr\\+ps\\+qr\\+qs\\+rs\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}+pqr\\+pqs\\+prs\\+qrs\end{matrix}\right\} x \quad +pqrs=0.$$

$$x^4+ax^3\quad+bx^2\quad+cx\quad+d\quad=0.$$

D'où il suit que dans une équation du quatrième degré, le coefficient du second terme égale la somme de toutes les racines, le coefficient du troisième terme égale la somme des produits de ces racines multipliées deux à deux; celui du quatrième terme égale la somme des produits des racines multipliées trois à trois, et ainsi de suite pour les équations des autres degrés; et qu'enfin le dernier terme est le produit de toutes les racines. On auroit tiré la même conclusion en faisant les opérations que nous avons faites pour les équations du troisième degré.

37. Donc quand l'équation a une racine rationnelle, cette racine doit être facteur du dernier terme. Nous ne répétons pas les autres observations faites dans les équations du troisième degré, et que nous avons remarquées s'appliquer aux équations d'un degré quelconque.

38. Les racines imaginaires des équations ne marchent jamais qu'en nombre pair, et l'une étant $a+b\sqrt{-1}$, l'autre est nécessairement $a-b\sqrt{-1}$; car il faut que le signe $\sqrt{-1}$ disparoisse dans la multiplication des deux racines, ce qui ne peut arriver que par la forme ci-dessus.

Au reste, $b\sqrt{-1}$ peut représenter la partie imaginaire de toute racine imaginaire; car si l'on avoit $2 \pm 5\sqrt{-4}$, cette expression se réduiroit à $2 \pm 10\sqrt{-1}$, comme $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1}$.

39. Une quantité imaginaire multipliée, divisée par une autre quantité imaginaire, élevée même

à une puissance dont l'exposant seroit imaginaire, est toujours réductible à une quantité de la forme $a \pm b \sqrt{-1}$.

40. Puisque les racines imaginaires marchent deux à deux, il suit que toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle, ou trois ou cinq, suivant le degré de l'équation. Ainsi tout problème qui conduit à une équation de degré impair a au moins une solution.

41. De même une équation de degré pair, ou n'a point de racine réelle, ou, si elle en a, il y en a deux ou quatre ou six, selon le degré de l'équation.

42. Toute équation de degré impair dont le dernier terme est négatif, a nécessairement une racine réelle positive ; et si ce dernier terme est positif, elle a au moins une racine réelle négative.

43. Toute équation d'un degré pair dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, puisque le produit réel de radicaux imaginaires qui font alors partie de deux polynômes multipliés l'un par l'autre, ne peut être qu'uue quantité positive.

44. Cela posé, une équation du quatrième degré étant proposée à résoudre, on commencera par en faire évanouïr le second terme, ce qui la changera en une autre de cette forme,

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Nous pouvons regarder l'équation transformée comme le produit de deux équations indéterminées, telles que

$$x^2+px+q=0 \ldots\ldots \text{ et } x^2-px+s=0.$$

On donne le même coefficient, aux signes près, au second terme de chaque équation indéterminée, afin que leur produit donne une équation qui n'ait pas le second terme. Je forme ce produit, j'ai

$$\begin{array}{llllll} x^4 & +px^3 & +qx^2 & -pqx & & \\ & -px^3 & -p^2x^2 & +spx & +sq=0. & \\ & & +sx^2 & & & \\ x^4 & + & +ax^2 & +bx & +c & =0. \end{array}$$

En comparant ces deux équations terme par terme, il en résulte les équations suivantes :

1°. $q+s-p^2=a.$

2°. $sp-pq=b.$

3°. $sq=c$ : d'où $q+s=a+p^2 \ldots\ldots s-q=\frac{b}{p}$;

d'où $s=\frac{a+p^2}{2}+\frac{b}{2p} \ldots\ldots q=\frac{a+p^2}{2}-\frac{b}{2p}$;

d'où $sq=c=\frac{a^2+2ap^2+p^4}{4}-\frac{b^2}{4p^2} \ldots\ldots$ donc $4cp^2=a^2p^2+2ap^4+p^6-b^2 \ldots\ldots$ donc $p^6+2ap^4+(a^2-4c)p^2-b^2=0$, équation du sixième degré, mais qui n'a d'autres difficultés que celles du troisième, en faisant $p^2=u$.

On appelle cette équation la réduite ; et ses racines étant une fois trouvées, on ne tarde guère à connoître celles de la proposée $x^4+ax^2+bx+c=0$.

En effet, je reviens aux équations indéterminées $x^2+px+q=0$ ...... $x^2-px+s=0$,

j'ai $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ | $x=+\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-s}$;

ou en substituant à la place de $q$ et $s$ leur valeur, on trouve ces quatre valeurs pour $x$ :

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{-\frac{a}{2}-\frac{p^2}{4}+\frac{b}{2p}},$$

$$x=+\frac{p}{2}\pm\sqrt{-\frac{a}{2}-\frac{p^2}{4}-\frac{b}{2p}};$$

ou sous la forme suivante :

$$x=-\frac{p}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2a-p^2+\frac{2b}{p}},$$

$$x=+\frac{p}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2a-p^2-\frac{2b}{p}}.$$

45. On n'a besoin que de déterminer $p^2$ par les moyens indiqués dans le chapitre précédent, prendre la racine carrée de la quantité trouvée, on connoîtra toutes les quantités qui composent le second membre de ces deux équations : pour cela on substitue dans la réduite, à la place d'$a$, $b$, $c$, leur valeur prise dans l'équation primitive, et la réduite devient une équation numérique facile à traiter.

46. Eclaircissons cette règle par un exemple. On demande les quatre racines de l'équation

$x^4-25x^2+60x-36=0$

$x^4+ax^2+bx+c=0.$

Cette équation, comparée avec la primitive, donne

$$a=-25\ldots.\ b=+60\ldots.\ c=-36:$$

donc la réduite devient.

$$p^6-50p^4+769p^2-3600=0;\text{ d'où on tire}$$

$$(p^2-25)\ (p^2-16)\ (p^2-9)=0.$$

Toutes les opérations faites, on trouve les quatre racines suivantes :

$$x-1=0\ldots x-2=0\ldots x-3=0\ldots x+6=0.$$

On voit, par les opérations que nous venons de faire, que $p$ a six valeurs différentes, et ces six valeurs conduisent toutes au même résultat, comme on peut le vérifier en les substituant les unes après les autres dans les deux équations finales :

Ce que nous démontrerons plus généralement dans le chapitre suivant, en parlant de la décomposition d'une équation quelconque.

47. Soit encore l'équation suivante :

$$x^4-3x^2-42x-40=0$$

$$x^4+ax^2+bx+c=0.$$

Je la compare avec la primitive,

$$a=-3\ldots.\ b=-42\ldots.\ c=-40;$$

la réduite devient

$p^6-6p^4+169p^2-1764=0$, qui se décompose par les deux facteurs suivans :

$$(p^4+3p^2+196)\ (p^2-9)=0;\text{ d'où } p^2=9.$$

En substituant dans les équations finales, on trouve

$$x^2-3x-4=0$$

$$x^2+3x+10=0.$$

La première de ces deux équations donne $x+1=0$

$x-4=0$,

et la seconde donne $x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{-31}$.

Cet exemple fait voir que lorsque la réduite a deux racines imaginaires, l'équation première $x^4$, etc., a aussi deux racines imaginaires. Nous le démontrerons bientôt plus généralement.

48. Nous allons l'appliquer à un exemple où $x$ est irrationnel. Supposons que nous ayons à chercher les racines de l'équation suivante :

$$x^4 + 3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Je la compare avec la primitive,

$$a = +3 \ldots . b = +2 \ldots . + c = -5;$$

la réduite deviendra donc

$p^6 + 6p^4 + 29p^2 - 4 = 0$. Je fais $p^2 = y - 2$, je trouve $y^3 + 17y - 46 = 0$.

Or, nous avons trouvé pour cette équation $y = 2,1341258173 39$ : donc $p^2 = 0,134125817339$. Or, en extrayant la racine carrée on trouve

$$p = 0,366231917423$$

$$\frac{2b}{p} = \frac{4,000000000000}{0,366231917423} = 10,922040951936.$$

En substituant dans les deux dernières équations du n° 44, les valeurs de $p$ et $p^2$, on a ces deux équations numériques,

$$x = -\frac{0,366231917423}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4,787915134597}$$

$$x = +\frac{0,366231917423}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-17,056166769275}.$$

Or, l'extraction de la première racine donne 2,188130511326 ; celle de la seconde donne 4,129911230193 : donc on aura pour $x$ les quatre valeurs suivantes,

$x = -1,27718121437 4,$

$x = +0,910949296951,$

$x = +\frac{0,366231917423}{2} \pm \frac{4,129911230193}{2} \sqrt{-1}.$

Ces nombres n'ont aucune erreur ; et s'il y en avoit, elle ne seroit que sur la dernière décimale, et de très-peu de chose, parce que pour le dernier chiffre de chaque opération nous avons pris toujours celui qui approchoit le plus de la vérité.

49. A présent nous allons reprendre les équations

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-\frac{p^2}{4} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2p}},$$

$$x = +\frac{p}{2} \pm \sqrt{-\frac{p^2}{4} - \frac{a}{2} + \frac{b}{2p}}.$$

Ce tableau fait voir que les quatre racines d'une équation du quatrième degré sont toutes quatre réelles ou toutes quatre imaginaires, ou que deux étant réelles, les deux autres sont imaginaires ; il ne peut y en avoir un nombre impair ni des unes ni des autres. Or, voici un moyen de connoître, par le moyen de la réduite, si elles sont réelles ou imaginaires.

50. Soit pour abréger $d = \frac{p}{2}$,

$h = +\sqrt{-\frac{p^2}{4} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2p}}$, $g = +\sqrt{-\frac{p^2}{4} - \frac{a}{2} + \frac{b}{2p}}$,

on aura $x = d + h$ . . . . . . . . $x = d - h$

$x = -d + g$ . . . . . . $x = -d - g$ : d'où

1°. $x - d - h = 0$ ;

2°. $x - d + h = 0$;

3°. $x + d - g = 0$;

4°. $x + d + g = 0$;

5°. $$\left.\begin{array}{l} x^4 - 2d^2 \\ \quad - h^2 \\ \quad - g^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^2 - 2dh^2 \\ \quad + 2dg^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + d^4 \\ \quad - d^2h^2 \\ \quad - g^2d^2 \\ \quad + h^2g^2 \end{array} = 0.$$

Je compare cette équation avec la primitive,

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0;$$

j'ai $a = -2d^2 - h^2 - g^2$, $+b = 2dh^2 + 2dg^2$, $c = +d^4 - d^2h^2 - g^2d^2 + h^2g^2$. Je vais substituer toutes ces valeurs à la place d'$a$, $b$, $c$, dans les coefficiens de la réduite; elle devient

$$\left.\begin{array}{l} p^6 - 4d^2 \\ \quad - 2h^2 \\ \quad - 2g^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} p^4 + 8d^2h^2 \\ \quad + 8d^2g^2 \\ \quad + h^4 \\ \quad - 2h^2g^2 \\ \quad + g^4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} p^2 + 8d^2h^2g^2 \\ \quad - 4d^2h^4 \\ \quad - 4d^2g^4 \end{array} = 0.$$

Or, les trois facteurs de cette dernière équation sont $p^2 - 4d^2 = 0$..... $p^2 - h^2 - 2hg - g^2 = 0$..... $p^2 - h^2 + 2hg - g^2 = 0$.

L'aperçu de ces trois équations fait voir que quand de deux radicaux $h$ ou $g$, l'un seulement est imaginaire, alors deux racines de la réduite sont imaginaires : donc la réduite ayant deux racines imaginaires, l'équation $x^4$, etc., en a deux réelles et deux imaginaires.

Quand, au contraire, les deux radicaux $h$, $g$,

sont tous les deux imaginaires, alors toutes les racines de la réduite sont réelles; car deux radicaux imaginaires multipliés l'un par l'autre donnent une quantité réelle : elles le sont aussi quand les deux radicaux sont tous les deux des quantités réelles. Reste donc à savoir comment, sachant que la réduite a ses trois racines réelles, on pourra distinguer si les racines de la proposée sont réelles ou imaginaires.

51. Or, nous avons aussi un moyen de faire cette distinction : si les trois racines de la réduite sont toutes positives, alors les quatre racines de la proposée sont toutes réelles. En effet, les trois racines de la réduite étant positives, $h^2-2hg+g^2$, qui est une de ces racines, doit aussi l'être; ce qui ne pourroit être en supposant les deux radicaux tous les deux imaginaires; car dans ce cas, $h^2$ et $g^2$ sont négatifs. Car élevez au carré un radical imaginaire, soit qu'il soit pris en plus ou en moins, il donne toujours une quantité négative;

$$+\sqrt{-m^2}\times+\sqrt{-m^2}=-m^2$$

$$\text{et } -\sqrt{-m^2}\times-\sqrt{-m^2}=-m^2;$$

ce qui se démontre dans le calcul des radicaux,

S'il n'y a dans la réduite qu'une racine positive, alors les deux radicaux $h$ et $g$ sont imaginaires. En effet, soit cette racine positive $4d^2$, de manière que l'on ait $p^2=4d^2$; alors $h^2+2hg+g^2$, est négative, et $h^2-2hg+g^2$, est aussi une quantité négative : donc la somme des deux carrés est négative; donc les deux radicaux sont imaginaires.

# CHAPITRE IV.

*Equation du cinquième degré.*

52. ON a eu six différentes valeurs pour $p$ dans la réduite qui sert à faire connoître les quantités qui forment les deux équations indéterminées.

Ce qui n'est pas bien difficile à concevoir ; car en décomposant une équation du quatrième degré en deux équations du second degré, on prend les racines de l'équation donnée deux à deux ; $p$ désigne la somme de deux des quatre racines qui composent l'équation du quatrième degré. Or, cette somme peut être prise de six manières différentes ; car soit $a$, $b$, $c$, $d$, les quatre racines de l'équation donnée, il est évident qu'en prenant la somme de deux de ces quatre racines, on peut la prendre de six manières différentes, on a $p=a+b$, $p=a+c$, $p=a+d$, $p=b+c$, $p=b+d$, $p=c+d$ ; de même aussi on a pour $q$ six valeurs différentes, qui sont $ab$, $ac$, $ad$, $bc$, $bd$, $cd$.

53. Une semblable observation nous conduira à connoître combien, dans la décomposition d'une équation du cinquième degré, la réduite doit avoir de racines. Soit l'équation

$$x^5+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0.$$

Si on décompose cette équation en deux équations

indéterminées, l'une du troisième, l'autre du second degré, la réduite doit avoir dix racines. En effet, en décomposant l'équation $x^5$, etc., en deux autres, une du troisième, et l'autre du second degré, on prend les cinq racines de l'équation donnée, trois à trois et deux à deux.

Supposons donc que les deux équations indéterminées soient

$$x^3+px^2+qx+r=0$$
$$x^2-px+s=0,$$

il est évident qu'$a$, $b$, $c$, $d$, $e$ étant les cinq racines de l'équation donnée $x^5$, etc., $p$ désignant la somme de trois de ces racines, cette somme peut être prise de dix manières différentes, de la manière qui suit. On peut avoir $p=a+b+c$, $p=a+b+d$, $p=a+b+e$, $p=a+c+d$, $p=a+c+e$, $p=a+d+e$, $p=b+c+d$, $p=b+c+e$, $p=b+d+e$, $p=c+d+e$; de même on aura pour $r$ les dix valeurs suivantes : $abc$, $abd$, $abe$, $acd$, $ace$, $ade$, $bcd$, $bce$, $bde$, $cde$.

De même aussi, dans l'équation indéterminée du second degré, on aura pour $-p$ les dix valeurs suivantes : $-d-e$, $-c-e$, $-c-d$, $-b-e$, $-b-d$, $-b-c$, $-a-e$, $-a-d$, $-a-c$, $-a-b$, et on aura pour $s$, $de$, $ce$, $cd$, $be$, $bd$, $bc$, $ae$, $ad$, $ac$, $ab$.

54. Dans les équations du sixième degré, si on les décompose en deux équations, une du second, et l'autre du quatrième degré, la réduite sera du quinzième degré; si on les décompose en deux

équations du troisième degré, la réduite sera du vingtième degré.

55. En général, en supposant l'équation du degré $n$, le nombre des racines de la réduite sera $\frac{n.n-1}{2}$, lorsque la plus petite équation indéterminée sera du second degré.

Ce nombre sera $\frac{n.n-1.n-2}{2.3}$, lorsqu'on prendra la plus petite équation indéterminée du troisième degré. Ce nombre sera $\frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}$, lorsqu'on prendra la plus petite équation indéterminée du quatrième degré.

56. Cela posé, nous allons chercher l'équation de la réduite dans les équations du cinquième degré.

Nous supposons l'équation donnée

$$x^5+ax^3+bx^2+cx+d,$$

décomposée dans les deux équations suivantes,

$$x^3-px^2+qx+r=0 \times x^2+px+s=0,$$

la multiplication donne

$$\begin{array}{llllll} x^5 & -px^4 & +qx^3 & +rx^2 & +prx & +sr=0 \\ & +px^4 & -p^2x^3 & +pqx^2 & +sqx & \\ & & +sx^3 & -spx^2 & & \\ x^5 & & +ax^3 & +bx^2 & +cx & +d=0, \end{array}$$

équation égale à la donnée; d'où l'on tire les équations suivantes:

1°. $q+s-p^2=a$;

2°. $r+pq-sp=b$;

3°. $pr+sq=c$;

4°. $sr=d$.

Il y a plusieurs manières de dégager $p$ : voici celle que nous avons trouvée la plus simple. De la première équation je tire,

5°. $q+s=a+p^2$; de la seconde,

6°. $q-s=\frac{b-r}{p}$; d'où

7°. $q=\frac{a+p^2}{2}+\frac{b-r}{2p}$;

8°. $s=\frac{a+p^2}{2}-\frac{b+r}{2p}$ : donc

9°. $sq=\frac{a^2p^2+2ap^4+p^6-b^2+2br-r^2}{4p^2}$.

Je substitue la valeur de $sq$ dans la troisième équation, celle de $s$ dans la quatrième; j'ai

10°. $r^2+(-2b-4p^3)r=p^6+2ap^4+a^2p^2-4cp^2-b^2=0$;

11°. $r^2+(p^3+ap-b)r=2pd$.

Ces deux équations nous conduiront à une équation finale où il n'y aura que des $p$. Il ne s'agit que d'apprendre à traiter ces sortes d'équations, et faire disparoître $r^2$ et $r$. Nous allons donner pour cela une formule qui servira pour tous les cas semblables.

57. Pour abréger, supposons que l'on ait les deux équations suivantes :

$r^2+mr=n$

$r^2+yr=z$.

Je soustrais ces deux équations l'une de l'autre, membre par membre, il vient

$mr - yr = n - z \ldots .$ d'où je tire $r = \frac{n-z}{m-y}$.
Pour avoir une autre valeur de $r$, je divise les deux équations l'une par l'autre, membre par membre, d'où je tire $r^2 z + mrz = nr^2 + nyr$; d'où $r = \frac{mz - ny}{n-z}$ : donc $\frac{n-z}{m-y} = \frac{mz-ny}{n-z}$;
d'où $n^2 - 2nz + z^2 = m^2 z - myz - mny + ny^2$, ou, pour plus de simplicité,

$$\overline{n-z}^2 + \overline{my - m^2} \times z + \overline{my - y^2} \times n = 0.$$

Cette forme abrége beaucoup le calcul, en le déchargeant de plusieurs termes semblables qui se détruisent les uns les autres par la différence du signe.

Substituant à la place de $m$, $n$, $y$, $z$, les quantités convenables, et désignées dans l'équation 10[e] et 11[e], on parvient à cette équation finale du dixième degré :

$$p^{10} + 3ap^8 - bp^7 \left.\begin{array}{l} -3c \\ +3a^2 \end{array}\right\} p^6 \left.\begin{array}{l} +11d \\ -2ab \end{array}\right\} p^5 \left.\begin{array}{l} -2ac \\ -b^2 \\ +a^3 \end{array}\right\} p^4 + \left.\begin{array}{l} +4bc \\ -a^2b \\ +4ad \end{array}\right\} p^3 \left.\begin{array}{l} +7bd \\ +a^2c \\ -ab^2 \\ -4c^2 \end{array}\right\} p^2 \left.\begin{array}{l} +a^2d \\ +b^3 \\ -4cd \end{array}\right\} p \begin{array}{l} +abd \\ -b^2c \\ -d^2 \end{array} = 0.$$

Cette équation fait voir que $p$ a dix racines, comme cela doit être, suivant ce que nous avons dit n° 53. Quoiqu'elle soit plus difficile à résoudre

que l'équation donnée, cependant on en conclut plusieurs conséquences très-intéressantes. Lorsque le dernier terme ou $+abd-b^2c-d^2$ est égal à zéro, alors une des racines de $p$ est égale à zéro, et par conséquent alors l'équation donnée a deux racines égales, aux signes près; car l'équation indéterminée du second degré n'a que deux termes.

58. Si au lieu de décomposer, comme nous l'avons fait, l'équation donnée en deux autres, l'une du troisième, l'autre du second degré, on l'avoit décomposée en trois équations de la forme suivante, $x^2+px+s=0 \ldots x^2+gx+h=0 \ldots x-p-g=0$, on auroit eu pour $p$ la même équation : d'où il suit que $p$ et $g$ sont deux racines de la réduite; par conséquent, la somme de deux racines de la réduite donne une racine de la proposée, et réciproquement la somme de deux racines de la proposée donne une racine de la réduite.

59. S'il s'agissoit de chercher l'équation dont les racines seroient les différences entre les racines de l'équation donnée, on verroit, avec un peu d'attention, et des considérations semblables à celles du n° 53, que 1°. ces racines sont au nombre de vingt, en supposant l'équation donnée du cinquième degré; et en général elles sont du nombre $n \,.\, n-1$; 2°. elles sont égales deux à deux, et de signe contraire; de sorte que l'équation des différences manque de toutes les puissances impaires. On y seroit conduit par des calculs qui n'ont pas d'autre difficulté que celle de la longueur, en faisant des

opérations semblables à celles que nous avons faites pour avoir l'équation appelée la réduite, qui n'est, comme nous l'avons remarqué, qu'une formule pour avoir la somme des racines de l'équation donnée, prises deux à deux.

Le dernier terme de l'équation des différences est-il nul, alors l'équation donnée a deux racines égales; elle en auroit trois égales, si l'avant-dernier terme étoit aussi nul, et ainsi de suite.

C'est aussi par l'équation des différences qu'on peut connoître si l'équation donnée a des racines imaginaires; mais les coefficiens de l'équation des différences sont si longs à calculer (*), que je trouve plus avantageux d'abaisser, par le moyen des séries, l'équation donnée d'un degré, et de déterminer la racine réelle qu'elle contient, par une voie bien plus simple que je suivrai dans la troisième partie de cet ouvrage.

60. Par un tour d'analise particulier, on peut connoître aisément quelle est la somme des premières puissances, des carrés, des cubes, des quatrièmes, des cinquièmes puissances des racines renfermées dans une équation du cinquième degré, dont on a fait disparoître le second terme. On a pour cette détermination les équations suivantes, appelant $x$, $y$, $z$, $m$, $n$ les racines respectives comprises dans l'équation $x^5+ax^3+bx^2+cx+d=0$.

(*) Il y a dans cette équation quatre-vingt-treize termes à calculer, dont chacun équivaut à la vingtième puissance d'une des racines.

1°. $x+y+z+m+n=0$;

2°. $x^2+y^2+z^2+m^2+n^2=-2a$;

3°. $x^3+y^3+z^3+m^3+n^3=-3b$;

4°. $x^4+y^4+z^4+m^4+n^4=2a^2-4c$;

5°. $x^5+y^5+z^5+m^5+n^5=5ab-5d$.

61. Je vais démontrer chaque partie à part de la manière suivante.

L'équation $x^5+ax^3+bx^2+cx+d=0$ peut être représentée par

$\overline{x^2+px+s}=0\times\overline{x^2+qx+r}=0\times\overline{x-p-q}=0.$

Après avoir opéré la multiplication, et comparé l'équation qui en résulte avec l'équation donnée, on a dans la comparaison du second terme de la proposée avec le terme correspondant de l'indéterminée, l'équation suivante, $s+r-p^2-q^2-pq=a$; d'où $2p^2+2q^2+2pq-2s-2r=-2a$.

Or, le premier membre de cette équation est la somme des carrés de toutes les racines; ce qu'on peut vérifier en dégageant les deux racines $x^2+px+s$, ensuite les deux autres $x^2+px+r$; élevant au carré chacune en particulier, la somme des carrés des deux premières racines contenues dans $x^2+px+s$ est $p^2-2s$; la somme des carrés des deux autres est $q^2-2r$; ajoutant à ces deux sommes le carré de la troisième racine $=p^2+2pr+q^2$, on voit évidemment que $2p^2+2q^2+2pq-2r-2s$ est la somme des carrés des racines : donc, etc.

62. La somme des cubes des cinq racines d'une équation du cinquième degré est égale à $-3b$.

En comparant le troisième terme de la donnée avec le troisième de l'indéterminée, on a cette équation,

$$-ps-p^2q-pq^2-qr=b \text{ : d'où on tire}$$
$$3ps+3p^2q+3pq^2+3qr=-3b.$$

Or, le premier membre de cette équation est la somme des cubes des cinq racines, comme on peut s'en assurer en prenant le cube de chaque racine en particulier; car la somme des cubes des deux premières racines contenues dans $x^2+px+s$ est $-p^3+3ps$; la somme des cubes des deux autres est $-q^3+3qr$; le cube de la cinquième racine est $p^3+3p^2q+3pq^2+p^3$ : donc $3ps+3qr+3p^2q+3pq^2$ est la somme des cubes des racines de l'équation donnée; donc, etc.

63. Il est facile de démontrer que la somme des quatrièmes puissances des racines d'une équation du cinquième degré est $2a^2-4c$. En effet, en comparant le quatrième terme de l'équation donnée avec le quatrième de l'équation indéterminée, on a

$$sr-psq-p^2r-sq^2-pqr=c$$
$$-4sr+4psq+4p^2r+4sq^2+4pqr=-4c.$$

Je prends le double carré de l'équation $a$, j'ai
$2s^2+4sr-4sp^2-4sq^2-4spq-4rp^2-4rq^2-4rpq$
$+2r^2+2p^4+6p^2q^2+4p^3q+2q^4+4q^3p=2a^2.$
Ajoutant cette équation à la précédente, membre par membre, on a
$2s^2+2r^2-4sp^2-4rq^2+2p^4+6p^2q^2+4p^3q+$
$2q^4+4q^3p=2a^2-4c.$

Il s'agit de démontrer que le premier membre de cette équation est la somme des quatrièmes puissances des racines du cinquième degré ; ce qui se démontre comme ci-dessus. En effet, la somme des quatrièmes puissances, pour les deux premières racines, est $p^4-4p^2s+2s^2$ ; pour les deux autres est $q^4-4q^2r+2r^2$ ; la quatrième puissance de la cinquième racine est $p^4+4p^3q+6p^2q^2+4pq^3+q^4$ : donc, etc.

64. La somme des cinquièmes puissances est égale à $5ab-5d$ ; ce qui se démontre plus brièvement de la manière suivante.

Soit $x$, $y$, $z$, $m$, $n$, les cinq racines de la proposée, on a

$$x^5+ax^3+bx^2+cx+d=o.$$
$$y^5+ay^3+by^2+by+d=o.$$
$$z^5+az^3+bz^2+bz+d=o.$$
$$m^5+am^3+bm^2+bm+d=o.$$
$$n^5+an^3+bn^2+cn+d=o.$$

Substituant à la place de la somme des cubes et de celle des carrés, leurs valeurs déjà trouvées, on a $y^5+x^5+z^5+m^5+n^5=5ab-5d.$

65. La somme des carrés des racines d'une équation quelconque, si elles sont toutes réelles, doit être positive ; car il est évident qu'appelant $a$, $b$, $c$, etc., ces racines, elles sont $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, etc., et leurs carrés sont $+a^2$, $+b^2$, $+c^2$, etc., dont la somme doit être positive : donc, lorsque cette somme est négative, il doit nécessairement y avoir des racines imaginaires.

On voit que la même conséquence doit avoir lieu pour la somme des quatrièmes puissances, des sixièmes puissances d'une équation quelconque.

Je ne doute point que ces nouvelles propositions ne conduisent, dans la suite, les analistes à de nouvelles vérités.

---

# SECONDE PARTIE.

*Résolution des équations par les séries.*

## CHAPITRE Ier.

*Notions sur les séries ; usage des coefficiens indéterminés, pour la méthode directe des séries.*

66. On appelle série une suite de quantités qui croissent ou décroissent suivant une loi qui se connoît par les premiers termes.

On appelle suite finie, celle qui est composée d'un nombre limité de termes, et on appelle suite infinie, celle dont le nombre des termes est infini.

Les séries dont les termes vont en augmentant de valeur à mesure qu'ils s'éloignent du premier, s'appellent séries divergentes ; et au contraire on appelle séries convergentes, celles dont les termes diminuent de valeur à mesure qu'ils s'éloignent du premier.

Il y a des quantités qu'on ne peut évaluer que par approximation : les séries sont d'un grand secours pour trouver la valeur approchée de ces sortes de quantités.

Les analistes ont imaginé la méthode des coefficiens indéterminés, pour réduire en séries les

quantités fractionnaires algébriques, et les quantités irrationnelles. C'est une méthode ingénieuse, féconde en inventions, et qui est la principale base du traité des séries, tel que nous le proposons ici. Nous allons l'expliquer par des exemples.

67. Supposons que l'on veuille réduire en série la quantité $\frac{1}{q+x}$. On le pourroit sans doute par le seul procédé de la division, qui donne $\frac{1}{q}-\frac{x}{q^2}+\frac{x^2}{q^3}-\frac{x^3}{q^4}$, etc.; mais on peut aussi trouver la même suite par la méthode suivante.

Ayant pris des quantités indéterminées A, B, C, D, E, pour les faire servir de coefficiens aux différens termes qui composent la série, il est clair que je puis faire, 1°. la quantité donnée $\frac{1}{q+x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$, etc., les termes du second membre de cette équation étant évidemment une série équivalente à la fraction proposée, lorsque j'aurai substitué à la place des inconnues ou indéterminées A, B, C, etc., la valeur qu'il faut pour cet effet : or, cette valeur se déterminera par des observations très-simples. Pour cela, dans l'équation $\frac{1}{q+x}=A+Bx$, etc., je multiplie le second membre par le dénominateur $q+x$, j'ai

2°. $1=Aq+Bqx+Cqx^2+Dqx^3+Eqx^4$, etc.
$\quad +Ax\ +Bx^2\ +Cx^3\ +Dx^4$, etc.

j'aurai donc

$$3^{o}.\ o = Aqx^{o} + Bqx + Cqx^{2} + Dqx^{3} + Eqx^{4}, \text{ etc.}$$
$$\quad - 1x^{o} + Ax + Bx^{2} + Cx^{3} + Dx^{4}, \text{ etc.}$$

Le second membre se réduit à zéro : or, cette réduction ne peut être opérée que par la destruction des termes semblables. Les coefficiens de $x^{o}$ devant se détruire, et de même ceux de $x$, de $x^{2}$, et en général les coefficiens des termes semblables, nous avons les équations suivantes :

$$Aq - 1 = o,\ Bq + A = o,\ Cq + B = o,\ Dq + C = o.$$

Ces équations, dont le nombre égale celui des indéterminées, font connoître la valeur qu'il faut donner à toutes les quantités A, B, C, afin d'avoir pour la suite $\begin{matrix} Aqx^{o} + Bqx, \text{ etc.} \\ -x^{o} + Ax, \text{ etc.} \end{matrix}$, une série équivalente à zéro, et par conséquent afin d'avoir pour la suite $A + Bx + Cx^{2}$, etc., une série équivalente à la fraction $\frac{1}{q+x}$; car une lettre qui représente une quantité dans une équation ultérieure, la représente aussi dans les autres équations qui y ont conduit; et en substituant dans celles-ci les quantités réelles à la place des indéterminées, on doit toujours avoir des équations vraies.

Dans le cas présent, les équations formées des coefficiens des termes semblables donnent premièrement $A = \frac{1}{q}$; on substitue cette valeur dans l'équation suivante, et on trouve $B = -\frac{1}{q^{2}}$; on substitue de même la valeur de B dans l'équation

suivante, et on trouve $C=\frac{1}{q^3}$; enfin, mettant ces valeurs respectives à la place d'A, B, C, etc., dans l'équation primitive de la série, on a $\frac{1}{q+x}=\frac{1}{q}-\frac{x}{q^2}+\frac{x^2}{q^3}-\frac{x^3}{q^4}$, etc. C'est la même série que celle que donne la division.

68. Si l'on a à réduire en série une quantité de cette forme $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}$, on fera de même

$$\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}=Ax^0+Bx^2+Cx^3+Dx^4, \text{ etc.};$$

faisant disparoître le dénominateur du premier membre par la multiplication, j'ai

$$\begin{aligned} a^2 = Aa^2 &+ Ba^2x + Ca^2x^2 + Da^2x^3, \text{ etc.} \\ &+ 2Aax + 2Bax^2 + 2Cax^3, \text{ etc.} \\ &- Ax^2 \quad - Bx^3, \text{ etc.} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit $a^2=Aa^2$, et par conséquent $A=1$; ensuite $Ba^2+2Aa=0$, d'où l'on tire $B=-\frac{2}{a}$. Par une suite de substitutions semblables, on trouve $C=+\frac{5}{a^2}\dots D=-\frac{12}{a^3}$; et par conséquent l'équation. . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}=Ax^0+Bx+Cx^2+Dx^3, \text{ etc.}$$

se trouvera changée en la suivante :

$$\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}=1-\frac{2x}{a}+\frac{5x^2}{a^2}-\frac{12x^3}{a^3}, \text{ etc.};$$

ce qu'on auroit aussi trouvé par la division.

69. En extrayant la racine carrée d'$a^2 - x^2$ par les règles ordinaires, on trouve $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$, etc. Or, la méthode des coefficiens indéterminés donne le même résultat. Je fais

$$\sqrt{a^2 - x^2} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6, \text{ etc.}$$

Je mets $x^2$, $x^4$, etc., parce qu'en faisant l'extraction, comme en faisant la division, on voit successivement paroître les première, deuxième, troisième, quatrième puissances du second terme par rapport auquel on ordonne. Ici, la première puissance du second terme du binôme est $x^2$ : donc au second terme de la série il doit y avoir $x^4$, au troisième $x^6$, etc. Cela posé, j'élève au carré les deux membres de l'équation

$$\sqrt{a^2 - x^2} = A + Bx^2, \text{ etc., il vient}$$

$$a^2 - x^2 = A^2 + 2ABx^2 + B^2x^4 \quad + 2ADx^6, \text{ etc.}$$
$$+ 2ACx^4 + 2BCx^6, \text{ etc.}$$

Transposant les termes du premier membre dans le second, égalant à zéro la somme des coefficiens de chaque terme semblable, on trouve $A^2 = a^2$ : donc, 1°. $A = a$ ; et par une opération semblable aux précédentes, on tire, 2°. $B = -\frac{1}{2a}$ ; 3°. $C = -\frac{1}{8a^3}$, $D = -\frac{1}{16a^5}$. En sorte que la série $A + Bx^2 + Cx^4$, etc., devient celle-ci :

$$a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}, \text{ etc.}$$

Les autres termes seront faciles à trouver, en suivant la même marche.

## CHAPITRE II.

*Usage des coefficiens indéterminés, pour la méthode inverse des séries.*

70. UN des principaux usages que les analistes ont fait de la théorie des coefficiens indéterminés, est de l'appliquer à la méthode inverse des séries.

Cette méthode consiste en ce qu'ayant l'expression de la valeur de $x$ par une série des puissances de $y$, on détermine la valeur de $y$ par une série inverse des puissances de $x$.

71. Cela posé, je suppose d'abord une équation de la forme suivante, qui est la plus simple; je prends donc

1°. $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$, etc.

$a$, $b$, $c$, etc., étant des quantités connues, il s'agit de déterminer la valeur de $y$ par une série des puissances de $x$; je fais

2°. $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4$, etc.

Pour déterminer les quantités A, B, C, D, etc., je prends les différentes puissances de cette seconde équation, de manière que je ne pousse, pour chaque puissance, le calcul que jusqu'au terme où j'ai intention de m'arrêter; j'ai donc

3°. $y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + 2ACx^4$, etc.
$+ B^2x^4$, etc.

4°. $y^3 = \ldots\ldots\ A^3x^3 \quad + 3A^2Bx^4$, etc.

5°. $y^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ A^4x^4$, etc.

Je substitue à présent ces différentes valeurs de $y$,

$y^2$, $y^3$, $y^4$, etc., dans le second membre de la première équation ; je multiplie la série équivalente à $y$ par le coefficient $a$, la série équivalente à $y^2$ par le coefficient $b$, et celle qui représente $y^3$ par le coefficient $c$, celle qui est égale à $y^4$ par le coefficient $d$, je trouve

$$\begin{array}{llll} 6^o.\ x = Aax + Bax^2 & + Cax^3 & + Dax^4, \text{ etc.} \\ \quad + A^2bx^2 & + 2ABbx^3 & + B^2bx^4, \text{ etc.} \\ & + A^3cx^3 & + 2ACbx^4, \text{etc.} \\ & & + 3A^2Bcx^4, \text{etc.} \\ & & + A^4dx^4, \text{ etc.} \end{array}$$

Dans cette sixième équation, je fais passer $x$ dans le second membre; j'égale à zéro, comme cela doit être, la somme des coefficiens dans chaque terme semblable, j'ai cette suite d'équations :

Dans la première colonne je trouve $1 = Aa$, et $A = \frac{1}{a}$; dans la seconde je trouve $Ba + A^2b = 0$; donc $B = -\frac{b}{a^3}$; dans la troisième colonne je trouve $Ca + 2ABb + A^3c = 0 \ldots$ d'où $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$; enfin, dégageant de la même manière D dans la quatrième colonne, je trouve $D = \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}$. Substituant ces valeurs d'A, B, C, dans la seconde équation, il se trouve que de l'expression $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$, etc., se déduit l'équation finale $y = \frac{x}{a} - \frac{bx^2}{a^3} + \frac{(2b^2 - ac)}{a^5}x^3 + \frac{(5abc - a^2d - 5b^3)}{a^7}x^4$, etc.

72. Dans l'exemple que nous venons de donner, les puissances de $y$ dans la première série, et celles de la quantité $x$ dans la seconde série, vont en croissant, comme 1, 2, 3, etc.; à présent nous allons supposer qu'elles aillent en croissant, comme 1, 3, 5, 7, etc., de manière que l'on ait, par exemple,

1°. $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7$, etc.

Pour avoir la série inverse, je fais

2°. $y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7$, etc.

donc

3°. $y^3 = \ldots A^3x^3 + 3A^2Bx^5 + 3A^2Cx^7$, etc.
$+ 3AB^2x^7$, etc.

4°. $y^5 = \ldots\ldots\ldots A^5x^5 + 5A^4Bx^7$, etc.

5°. $y^7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A^7x^7$.

Je substitue ces différentes valeurs de $y$, $y^3$, $y^5$, dans la première équation, et je multiplie le second membre de la seconde équation $y$ par $a$; le second membre de la troisième équation $y^3$ par le coefficient $b$; le second membre de la quatrième équation $y^5$ par le coefficient $c$, et ainsi de suite, et j'ai

$$\begin{aligned} x = Aax + Bax^3 &+ Cax^5 + Dax^7, \text{ etc.} \\ + A^3bx^3 &+ 3ABbx^5 + 3A^2Cbx^7, \text{ etc.} \\ &+ A^5cx^5 + 3AB^2bx^7, \text{ etc.} \\ &+ 5A^4Bcx^7, \text{ etc.} \\ &+ A^7dx^7, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ensuite, en opérant sur cette série comme sur les autres, on trouve $1 = Aa$, et par conséquent $A = \frac{1}{a} \ldots\ldots Ba + A^3b = 0 \ldots\ldots$ par conséquent

$B = -\frac{b}{a^4}$; . . . . . . puis $C = \frac{3b^2 - ac}{a^7}$ . . . . . .
$D = \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}$ ; en sorte qu'ayant $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7$, etc., la série inverse est $y = \frac{x}{a} - \frac{bx^3}{a^4} + \frac{(3b^2 - ac)}{a^7}x^5 + \ldots$
$+ \frac{(8abc - a^2d - 12b^3)}{a^{10}}x^7$, etc.

---

## CHAPITRE III.

*Sommation des carrés, des cubes et autres puissances des termes d'une progression arithmétique quelconque.*

73 Quoique je n'aie pas intention, dans cette partie, d'exposer la sommation des progressions arithmétiques et géométriques qui se déduit de leurs propriétés, je mettrai cependant ici la sommation des carrés, des cubes et des autres puissances d'une progression arithmétique quelconque, parce que j'en aurai besoin dans d'autres cas, et particulièrement dans la recherche des coefficiens qui doivent affecter les termes de la série équivalente à $\overline{1+x}^n$.

74. Soient $a$, $b$, $c$, $e$, $f$, etc. $u$, plusieurs nombres en progression arithmétique, dont la différence

soit $d$, le premier terme $a$, le dernier $u$. On aura

$$1^{\circ}.\ b=a+d,\ c=b+d,\ u=c+d.$$

J'élève au carré toutes ces quantités, j'ai

$$2^{\circ}.\ b^2=a^2+2ad+d^2$$
$$c^2=b^2+2bd+d^2$$
$$u^2=c^2+2cd+d^2.$$

En ajoutant ces équations, laissant les termes qui se détruisent, et observant que $d^2$ doit être répété autant de fois qu'il y a d'équations (or, il y a autant d'équations moins une qu'il y a de termes), le nombre des termes étant $n$, nous voyons paroître cette troisième équation :

$$3^{\circ}.\ u^2=a^2+\left.\begin{matrix}2a\\+2b\\+2c\end{matrix}\right\} d+(n-1)d^2.$$

Mais appelant $s'$ la somme des premières puissances, j'ai $s'=a+b+c+u$ : donc $a+b+c=s'-u$ ; donc

$$4^{\circ}.\ u^2=a^2+2ds'-2du+(n-1)d^2;\ \text{donc}$$
$$2ds'=u^2-a^2\ +2du-(n-1)d^2;\ \text{donc}$$
$$5^{\circ}.\ s'=\frac{u^2-a^2-(n-1)d^2}{2d}+u.$$

Or, quand la progression est celle des nombres naturels, $a=1$ . . . $n=u$ . . . $d=1$ . . . donc on a pour la sommation des premières puissances des nombres naturels,

$$6^{\circ}.\ s'=\frac{u^2+u}{2}.$$

*Nota.* Il est évident que si entre $a$ et $u$ il y avoit eu plus de termes, la combinaison auroit été la

même, et que par conséquent on auroit eu le même résultat.

75. La sommation des premières puissances nous conduira à celle des carrés. Je reviens aux premières équations $b=a+d$, $c=b+d$, $a=c+d$; je les élève au cube, j'ai

1°. $b^3=a^3+3a^2d+3ad^2+d^3$
$c^3=b^3+3b^2d+3bd^2+d^3$
$u^3=c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$.

J'ajoute ces nouvelles équations ; je laisse les termes qui se détruisent ; je vois que $d^3$ sera répété autant de fois qu'il y a d'équations, c'est-à-dire, $n-1$ de fois ; je mets sous une colonne les quantités qui multiplient $d$, et sous une autre colonne les quantités qui multiplient $d^2$, j'ai

$$2^\circ.\ u^3=a^3+\left.\begin{matrix}3a^2\\+3b^2\\+3c^2\end{matrix}\right\}d+\left.\begin{matrix}3a\\+3b\\+3c\end{matrix}\right\}d^2+\overline{n-1}\,d^3.$$

Or, appelant $s''$ la somme des carrés $a^2+b^2+c^2+u^2$, j'aurai $a^2+b^2+c^2=s''-u^2$ ; mais de plus $a+b+c=s'-u$, il vient donc

3°. $u^3=a^3+3d(s''-u^2)+3d^2(s'-u)+\overline{n-1}\,d^3$.

Substituant à la place de $s'-u$ sa valeur que l'on trouve à l'équation 5$^e$ du n° 74, il vient

$$4^\circ.\ s''=\frac{2u^3-2a^3+3du^2+3da^2+(n-1)d^3}{6d}.$$

Or, quand la progression est celle des nombres naturels, $u=n$, $d=1$, $a=1$; par conséquent, dans ce cas, on a $s''=\dfrac{2u^3+3u^2+u}{6}$.

76. Maintenant, pour avoir la sommation des cubes, il ne s'agit que de faire toujours les mêmes combinaisons.

Je reviens donc aux premières équations $b=a+d$, $c=b+d$, $u=c+d$; je les élève à la quatrième puissance, j'ai

$$1^\circ.\quad b^4=a^4+4a^3d+6a^2d^2+4ad^3+d^4$$
$$c^4=b^4+4b^3d+6b^2d^2+4bd^3+d^4$$
$$u^4=c^4+4c^3d+6c^2d^2+4cd^3+d^4.$$

J'ajoute ces équations; je laisse les termes qui se détruisent, je trouve

$$2^\circ.\; u^4=a^4+\left.\begin{array}{l}4a^3\\+4b^3\\+4c^3\end{array}\right\}d+\left.\begin{array}{l}6a^2\\+6b^2\\+6c^2\end{array}\right\}d^2+\left.\begin{array}{l}4a\\+4b\\+4c\end{array}\right\}d^3+(n-1)d^4$$

Dans le second terme du second membre de cette équation, appelant $s'''$ la somme de tous les cubes, on aura $a^3+b^3+c^3=s'''-u^3$, de plus $a^2+b^2+c^2=s''-u^2$, de plus $a+b+c=s'-u$: donc on a

$$3^\circ.\; u^4=a^4+4d(s'''-u^3)+6d^2(s''-u^2)+4d^3(s'-u)+(n-1)d^4$$
$$u^4=a^4+4ds'''-4du^3+2du^3-2a^3d+3d^2a^2+\overline{n-1}\,d^4-3d^2u^2+2d^2u^2-2d^2a^2-2(n-1)d^4+(n-1)d^4:$$

donc $s'''=\dfrac{u^4-a^4+2du^3+2a^3d-d^2a^2+d^2u^2}{4d}$.

Quand la progression est celle des nombres naturels, $u=n$, $d=1$, $a=1$ : donc alors

$$s''' = \frac{u^4 + 2u^3 + u^2}{4}.$$

Ces formules serviront à la démonstration des coefficiens de la série équivalente au binôme $\overline{1+x}^n$ : d'où il suit que la sommation de la progression des premières puissances des nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc. $\infty = \frac{\infty^2}{2}$;

La sommation de la série des carrés des nombres naturels $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$, etc. $\infty^2 = \frac{\infty^3}{3}$;

La sommation des cubes $1^3, 2^3, 3^3, 4^3$, etc. $\infty^3 = \frac{\infty^4}{4}$;

En général, la sommation de $1^m, 2^m, 3^m, 4^m$, etc. $\infty^m = \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$.

---

## CHAPITRE IV.

*Développement des termes de la série équivalente à l'expression* $\overline{1+x}^n$.

77. Pour parvenir à trouver la valeur générale de $\overline{1+x}^n$, ou de $1+x$ multiplié par lui-même autant de fois moins une que l'unité est contenue dans $n$, on peut procéder de la manière suivante :

On forme plusieurs puissances successives de

$1 + x$, par la voie ordinaire de la multiplication, et on fait un tableau dans lequel on écrit, à mesure qu'ils viennent, les termes semblables, sans les réduire ; mais on les met sous une même colonne, sans confondre les accroissemens qui surviennent à chaque opération nouvelle, de la manière que nous l'avons fait dans le tableau qu'on trouve ci-joint.

78. Cela posé, il est évident que pour le second terme la première puissance de $x$ est répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans l'ordre de la puissance proposée : donc si la puissance est $n$ième, il y aura $nx$.

79. Les termes suivans sont évidemment $x^2$, $x^3$, $x^4$, etc., affectés de coefficiens qui dépendent de la puissance $n$.

Pour trouver les coefficiens de ces termes exprimés par la quantité $n$, j'observe que d'après le tableau que je viens de former, il existe une loi commune dans les accroissemens des quantités $x^2$, $x^3$, $x^4$, etc., qui surviennent à chaque formation d'une nouvelle puissance ; et cette loi consiste en ce que l'accroissement des $x^2$ survenant à une nouvelle puissance, égale la somme de tous les $x$ de la puissance précédente, j'appelle $a$, $b$, $c$, $d$, etc., les accroissemens des $x^2$ : de même l'accroissement des $x^3$ survenant à chaque nouvelle puissance, égale la somme de tous les $x^2$ de la puissance précédente, j'appelle $g$, $h$, $i$, etc., les accroissemens des $x^3$ : de même l'accrois-

sement des $x^4$ survenant à chaque nouvelle puissance, égale la somme de tous les $x^3$ de la puissance précédente, j'appelle $p$, $q$, etc., les accroissemens des $x^4$.

En un mot, en nous arrêtant à la dernière puissance formée sur le tableau, et en considérant les colonnes $x^2$, $x^3$, $x^4$, etc., on voit que les accroissemens font une progression telle que chacun des termes de la progression dans une colonne, égale la somme de tous les termes de la progression collatérale à gauche, non compris cependant celui qui est à côté, qui n'appartient pas à la puissance précédente; par exemple, l'accroissement $i = a + b + c$, ou $6 = 3 + 2 + 1$. D'après ce principe, il est facile de sommer ces progressions successivement générées les unes des autres, et ayant toutes pour base la progression uniforme des unités 1, 1, 1, etc.

80. Pour sommer la progression des accroissemens des $x^2$, je vois qu'ils sont comme 1, 2, 3, etc.; le dernier accroissement ou le dernier terme de cette progression est $n - 1$. Or, la somme des premières puissances des nombres naturels, exprimée par leur dernier $u$, égale $\frac{u^2 + u}{2}$: donc nous aurons la totalité des $x^2$ ou $t''x^2 = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

81. La sommation des $x^3$ est très-facile. En effet, il est évident que la totalité des $x^3$ ou

$t'''x^3 = g + h, + i$, etc. Or, $i = \frac{c^2+c}{2}$, $h = \frac{b^2+b}{2}$, $g = \frac{a^2+a}{2}$. Mais nous avons vu la somme $s''$ des carrés des nombres naturels, par le dernier $u$, $s'' = \frac{2u^3+3u^2+u}{6}$ : j'aurai donc. . . . . . . . . .

$$t'''x^3 = \frac{2c^3+3c^2+c}{12} + \frac{c^2+c}{4} = \frac{2c^3+6c^2+4c}{12}$$

$= \frac{c^3+3c^2+2c}{6}$. Or, il est évident que $c$ égale la totalité des unités qui appartiennent à la puissance précédente, égale par conséquent à $n-2$ : donc, toute substitution faite, on a $t'''x^3 = \frac{n(n-1)(n-3)}{2 \cdot 3} x^3$.

*Nota.* Les termes qui marquent les accroissemens des $x^2$, et qui forment la progression de la seconde colonne, croissent chaque fois d'une unité, et sont par conséquent 1, 2, 3, à prendre de haut en bas ; mais à prendre de bas en haut, ils décroissent chaque fois d'une unité, et sont $n-1$, $n-2$, $n-3$ ; ce que la seule inspection de notre tableau rend sensible. Or, les $x^3$ se déduiront toujours du second terme de la seconde colonne, en remontant, comme on peut le voir en prenant au lieu de la cinquième toute autre puissance ; par conséquent ce terme sera toujours $n-2$. Quelque puissance que l'on prenne, on sera donc toujours conduit au même résultat.

82. Avant que de sommer les $x^4$, nous ferons les remarques suivantes :

Nous avons trouvé pour les trois accroissemens des $x^3$, $g, h, i = \frac{c^3+3c^2+2c}{6}$ ;

Les deux accroissemens des $x^3$, $h+g$, donnent $h+g = \frac{b^2+b}{2} + \frac{a^2+a}{2} = \frac{b^3+3b^2+2b}{6} = \frac{\overline{b^2+b}}{2} \times \frac{\overline{b+2}}{3}$ :

Donc, en ne prenant que le seul accroissement $g$, on a $g = \frac{a^3+3a^2+2a}{6}$. D'où il suit, en général, que pour sommer un nombre déterminé des accroissemens des $x^3$, il faut multiplier le dernier accroissement où on s'arrête, par le tiers du terme augmenté de deux, qui, dans la progression collatérale, détermine son expression. Cela posé, j'ai $t''' x^4 = p+q$... Or, $q = h+g = \frac{b^3+3b^2+2b}{6}$...

$p = g = \frac{a^3+3a^2+2a}{6}$ . . . . . donc

$t''' x^4 = \frac{b^3+3b^2+2b+a^3+3a^2+2a}{6}$. Mais nous avons trouvé pour la sommation des cubes des nombres naturels, exprimée par le dernier, $s''' = \frac{u^4+2u^3+u^2}{4}$ : donc $b^3+a^3 = \frac{b^4+2b^3+b^2}{4}$ ;

de plus, $a^2+b^2$ (n° 75) $= \frac{2b^3+3b^2+b}{6}$. . . . .

$a+b=\frac{b^2+b}{2}$ : donc j'ai $t''''x^4=\frac{b^4+2b^3+b^2}{6 \cdot 4}+\frac{2b^3+3b^2+b}{2 \cdot 6}+\frac{b^2+b}{6}$. Donnant à toutes les fractions un même dénominateur, j'ai

$$t''''x^4=\frac{b^4+2b^3+b^2}{6 \cdot 4}+\frac{4b^3+6b^2+2b}{6 \cdot 4}+\frac{4b^2+4b}{6 \cdot 4}:$$

donc $t''''x^4=\frac{b^4+6b^3+11b^2+6b}{2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Or, j'observe que $b$, ou le troisième terme de la seconde colonne verticale, en remontant, sera toujours $n-3$ : donc on a

$$t''''x^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4, \text{ etc.}$$

83. Réunissant tous ces termes, on voit que l'on doit avoir $\overline{1+x}^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}x^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4$, etc.

84. Puisque $\overline{1+x}^n=1+\frac{nx+n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}x^3$, etc. il est facile maintenant d'avoir la puissance $n$ du binôme $a+b$ ; car j'observe que $a+b=a\times\overline{1+\frac{b}{a}}$ : donc $\overline{a+b}^n=a^n\times\overline{1+\frac{b}{a}}^n=$

$$a^n\left(1+n\frac{b}{a}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\frac{b^3}{a^3}\right., \text{ etc.}$$

NCE.

$x^2 [\frac{g}{e}]$

$h]$ $+ x^4 [p]$ $\Big\} \times (1 + x) + x^4 [p]$

$+ x^4$

$+ x^4$

$+ x^4 [q]$

$+ x^4$

$+ x^6$



*Démonstration plus abrégée et plus générale.*

85. Comme les principes sur lesquels cette formule est fondée, supposent que l'exposant est un nombre entier positif, on pourroit douter si elle peut servir dans le cas où cet exposant est fractionnaire ou négatif. Nous allons donc donner une autre démonstration que l'on verra évidemment s'étendre à tous les cas.

Si on représente les coefficiens de la série équivalente au binôme $\overline{1+x}^n$, on parvient à les connoître pour chaque terme, quel que soit $n$. Pour cela je pars de ce principe, que les coefficiens qui affectent les termes d'une puissance $n$ d'un binôme, doivent affecter ceux d'un autre binôme élevé à la même puissance. Cela posé, je fais

1°. $\overline{1+x}^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3$, etc.

Il s'agit de déterminer A, B, C, etc. Pour y parvenir, j'observe que les lois de la division donnent

2°. $\dfrac{1}{1+2x+x^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$, etc. : donc

3°. $\dfrac{1}{(1+x)(1+x)} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$, etc.; donc

4°. $\dfrac{1}{(1+x)^n(1+x)^n} = \overline{1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 +, \text{etc.}}^n$

Dans le second membre de cette équation, je prends 1 pour le premier terme; la somme des autres, que je désigne par $s$, sera le second; j'aurai donc

5°. $\frac{1}{(1+Ax+Bx^2+Cx^3),\text{etc.}\,(1+Ax+Bx^2+Cx^3),\text{etc.}} = 1+As+Bs^2+Cs^3$, etc.

Je m'arréte aux $x^3$, pour éviter la longueur ; donc on a

6°. $$\frac{1}{\begin{array}{l}1+2Ax+2Bx^2+2Cx^3,\text{etc.}\\ \quad +A^2x^2+2ABx^3,\text{etc.}\end{array}} = 1+As+Bs^2+Cs^3,\text{etc.}$$

Je substitue à la place de $s$, $s^2$, $s^3$, leur valeur respective ; $s = -2x+3x^2-4x^3$, etc. . . . . $s^2 = 4x^2 - 12x^3$, etc. . . . . $s^3 = -8x^3$, etc. ; il vient

7°. $$\frac{1}{\begin{array}{l}1+2Ax+2Bx^2+2Cx^3,\text{etc.}\\ \quad +A^2x^2+2ABx^3,\text{etc.}\end{array}} = \begin{array}{l}1-2Ax+3Ax^2-4Ax^3\\ \qquad\quad +4Bx^2-12Bx^3\\ \qquad\qquad\qquad -8Cx^3\end{array}$$

Je fais disparoître la fraction du premier membre, il vient

8°. $$\begin{array}{rrrr} 1 = 1 & -2Ax & +3Ax^2 & -4Ax^3,\ \text{etc.}\\ & & +4Bx^2 & -12Bx^3\\ & & & -8Cx^3\\ & +2Ax & +2Bx^2 & +6A^2x^3\\ & & -4A^2x^2 & +8ABx^3\\ & & +A^2x^2 & -4ABx^3\\ & & & -2A^3x^3\\ & & & +2Cx^3\\ & & & +2ABx^3 \end{array}$$

Donc $3A+6B-3A^2=0$;

Donc $B = \frac{A^2-A}{2} = \frac{A(A-1)}{2}$;

Donc $12B=6A^2-6A$;

Donc $6AB=3A^3-3A^2$;

Donc $-4A-6A^2+6A+6A^2+3A^3-3A^2-2A^3=6C$;

Donc $2A+A^3-3A^2=6C$ :

D'où $C=\frac{A^3-3A^2+2A}{6}=\frac{A(A-1)(A-2)}{2.3}$.

Si l'on avoit continué au coefficient de $x^4$, on auroit eu $\frac{A(A-1)(A-2)(A-3)}{2.3.4}$. Il ne s'agit que de connoître A, coefficient du second terme : or, par les seules règles de l'arithmétique et de l'algèbre, on trouve toujours que ce coefficient est égal à l'exposant de la puissance, quelle que soit cette puissance. Donc, si l'exposant de la puissance est $n$, ce coefficient est aussi $n$ ; par conséquent on a

$$\overline{1+x}^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x^3, \text{etc.}$$

## CHAPITRE V.

*Application de la série du binôme à la formation de nouvelles séries par lesquelles on résout plusieurs questions trigonométriques.*

86. Nous allons nous servir de cette formule à la formation de nouvelles séries qui nous seront utiles pour la résolution des équations.

PROBLÈME Ier. Les sinus et cosinus de l'arc $e$ étant connus, déterminer les sinus et cosinus de l'arc double, triple, ou quadruple, ou quintuple, et en général les sinus et cosinus de l'arc $ne$.

RÉSOLUTION. Nous avons vu, trigonométrie,

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$
$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \quad \sin B.$$

Je fais le sinus de l'arc $e = y$ . . . $\cos e = x$; il suit donc

1°. $\sin e = y$
$\cos e = x.$

2°. $\sin 2e = 2xy$
$\cos 2e = x^2 - y^2.$

3°. $\sin 3e = 3yx^2 - y^3$
$\cos 3e = x^3 - 3xy^2.$

4°. $\sin 4e = 4yx^3 - 4y^3x$
$\cos 4e = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$

5°. $\sin 5e = 5yx^4 - 10y^3x^2 + y^5$
$\cos 5e = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4.$

Toutes ces équations se tirent par la voie de substitution des deux formules données ci-dessus pour l'évaluation des sinus et cosinus $A+B$ . . . Pour avoir la seconde équation, on fait simplement attention que l'on a ici l'arc $A =$ l'arc $B =$ l'arc $e$ . . . Pour la troisième équation, on prend pour les sinus et cosinus de l'arc $A'$, les sinus et cosinus de l'arc $2e$, déjà trouvés ; et pour sinus et cosinus de l'arc B qui reste une quantité constante, les sinus et cosinus de l'arc $e$ . . . On suit un procédé semblable pour les équations suivantes.

Je remarque dans tous ces résultats qu'à la dif-

férence des signes près, 1°. les termes qui composent le cosinus de l'arc $2e$, considérés conjointement avec ceux qui composent son sinus, se trouvent être les termes du carré de $x+y$; de même les termes qui composent le cosinus de $3e$, joints à ceux qui composent son sinus, se trouvent être les termes du cube de $x+y$, et ainsi de suite; 2°. les signes sont successivement $+$ et $-$ pour le sinus, et de même pour le cosinus; 3°. le cosinus comprend les premier, troisième, cinquième, septième, etc. termes de la puissance respective du binôme $x+y$, tandis que le sinus comprend les deuxième, quatrième, sixième, huitième, etc. termes.

D'où il suit que les termes qui composent le cosinus de l'arc $ne$, joints à ceux du sinus correspondant, sont les termes de $\overline{x+y}^n$. Or, j'ai

$$\overline{x+y}^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 + \ldots \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}y^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}x^{n-5}y^5 + \ldots\ldots \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6}x^{n-6}y^6, \text{ etc.}$$

Donnant donc d'abord au sinus et ensuite au cosinus les termes respectifs qui doivent y entrer, et faisant précéder ces termes successivement des signes $+$ et $-$, il vient,

1°. $\sin ne = nyx^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}y^3x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}y^5x^{n-5}$, etc. ;

2°. $\text{cosin}\ ne = x^n - \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,3\,.\,4}x^{n-4}y^4$, etc.

87. Problème IIe. Les sinus et cosinus de l'arc E étant connus, déterminer les sinus et cosinus de la moitié, du tiers, du quart, et généralement de $\frac{E}{n}$.

Solution. Je fais $\sin E = y$ . . . $\text{cosin}\ E = x$ ; je fais $\sin \frac{E}{n} = z$ . . . $\text{cosin}\ \frac{E}{n} = u$. Nous venons de voir dans le n° précédent,

1°. $\sin \frac{nE}{n} = nzu^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}z^3u^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}z^5u^{n-5}$, etc. ;

2°. $\text{cosin}\ \frac{nE}{n} = u^n - \frac{n(n-2)}{2}u^{n-2}z^2 + \ldots\ldots \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,3\,.\,4}u^{n-4}z^4$, etc. : donc

[a]

3°. $y = nzu^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}z^3u^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}z^5u^{n-5}$, etc. ;

$$4^\circ.\ x = u^n - \overset{[b]}{\frac{n(n-1)}{2}} u^{n-2} z^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{[d]}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}} u^{n-4} z^4, \text{ etc.}$$

$y$ et $x$ sont connues; il faut déterminer $z$ et $u$ : pour cela nous allons employer la méthode inverse des séries. Nous avons mis les quantités $a$, $b$, $c$, $d$, entre deux crochets, au-dessus des coefficiens $n(n-1)$, etc., pour marquer que ces lettres nous serviront à désigner ces coefficiens, qui rendroient le calcul trop long. Je donne à la quatrième équation la forme suivante :

$5^\circ.\ \frac{x}{u^n} = 1 + \frac{bz^2}{u^2} + \frac{dz^4}{u^4}$, etc.; je divise la troisième équation par la quatrième, j'ai

$6^\circ.\ \frac{y}{x} = \frac{nz}{u} + (a - nb)\frac{z^3}{u^3}$, etc. Or, par la méthode inverse des séries, on a

$7^\circ.\ \frac{z}{u} = \frac{y}{nx} + \left(\frac{nb - a}{n^4}\right)\frac{y^3}{x^3}$, etc.; je prends les différentes puissances de cette septième équation, j'ai $\frac{z^2}{u^2} = \frac{y^2}{n^2x^2} + \left(\frac{2nb - 2a}{n^5}\right)\frac{y^4}{x^4} +$, etc. ....
$\frac{z^3}{u^3} = \frac{y^3}{n^3x^3}$, etc. $\frac{z^4}{u^4} = \frac{y^4}{n^4x^4}$, etc. Je substitue ces valeurs dans la cinquième équation, j'ai

$8^\circ.\ \frac{x}{u^n} = 1 + \frac{by^2}{n^2x^2} + \left(\frac{2nb^2 - 2ab + dn}{n^5}\right)\frac{y^4}{x^4}$, etc.

J'égale tous les termes qui sont après $1$ à $s$, j'ai $s = \frac{by^2}{n^2x^2} + \left(\frac{2nb^2 - 2ab + dn}{n^5}\right)\frac{y^4}{x^4}$, etc. .... $s^2 = \frac{b^2y^4}{n^4x^4}$, etc. ... Maintenant il est facile de déduire de la huitième équation la valeur de $u$; car il est évident que j'ai $u^n = \frac{x}{1+s}$ : donc

$$9^\circ.\ u = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\overline{1+s}^{\frac{1}{n}}};$$ donc $u = x^{\frac{1}{n}}.\overline{1+s}^{-\frac{1}{n}}$. Je développe $\overline{1+s}^{-\frac{1}{n}}$, il vient $1 - \frac{1s}{n} + \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n}\right)s^2$, etc.; donc on a $u = x^{\frac{1}{n}} - \frac{x^{\frac{1}{n}}s}{n} + \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n}\right)x^{\frac{1}{n}}s^2 +$, etc. Je substitue à la place de $s$ sa valeur, je trouve

$$10^\circ.\ u = x^{\frac{1}{n}} - \frac{b}{n^3}x^{\frac{1}{n}-2}y^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{2nb^2+2ab-dn}{n^6} + \frac{b^2}{2n^6} + \frac{b^2}{2n^5}\right)x^{\frac{1}{n}-4}y^4, \text{ etc.}$$

Substituant à la place de $b$ sa valeur, il vient $u = x^{\frac{1}{n}} - \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{2}x^{\frac{1}{n}-2}y^2$ pour les deux premiers termes; je calcule le coefficient du troisième terme, et je le mets sous cette forme :

$$\frac{4ab - 3nb^2 + b^2 - 2nd}{2n^6}:$$

$$4ab = \frac{n^5 - 4n^4 + 5n^3 - 2n^2}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-3nb^2 = -\frac{3n^5 + 6n^4 - 3n^3}{4},$$

$$4ab = \frac{8n^5 - 32n^4 + 40n^3 - 16n^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \ldots\ldots\ldots$$

$$b^2 = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4},$$

$$-3n^2 + b^2 = -\frac{18n^5 + 42n^4 - 30n^3 + 6n^2}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Donc $4ab - 3nb^2 + b^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$-\frac{10n^5 + 10n^4 + 10n^3 - 10n^2}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Donc $\dfrac{4ab - 3nb^2 + b^2}{2n^6} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$-\frac{10n^5 + 10n^4 + 10n^3 - 10n^2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^6} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$-\dfrac{5n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 5n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^5}$. Il en faut ôter $\dfrac{d}{n^5}$. Or,

$-\dfrac{d}{n^5} = -\dfrac{n^4 + 6n^3 - 11n^2 + 6n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^5}$ : donc le coefficient $-\dfrac{6n^4 + 11n^3 - 6n^2 + n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^5} = \ldots\ldots\ldots$

$$-\frac{6n^3 + 11n^2 - 6n + 1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^4} = +\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\left(\frac{1}{n} - 2\right)\left(\frac{1}{n} - 3\right)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Donc

$$11^{\circ}.\ u = \text{cosin}\,\frac{E}{n} = x^{\frac{1}{n}} - \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{2}\, x^{\frac{1}{n} - 2} y^2 + \ldots$$

$$\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)x^{\frac{1}{n}-4}y^4}{2\,.\,3\,.\,4} -\text{, etc.}$$

A présent que l'on connoît $u$, il est facile de déterminer $z$. Pour cela revenons à la septième équation, qui donnoit

$\frac{z}{u}=\frac{y}{nx}+\left(\frac{nb-a}{n^4}\right)\frac{y^3}{x^3}$, etc. Dans cette équation mettons à la place de $u$ sa valeur exprimée par la onzième équation, nous aurons

$$12^o.\ z=\frac{yx^{n-1}}{n}+\left(\frac{nb-a}{n^4}-\frac{n+n^2}{2n^4}\right)y^3x^{n-3}\text{, etc.}$$

Je calcule le coefficient du second terme, j'ai $nb=-\frac{n^3+n^2}{2}$ : donc $\frac{nb-a}{n^4}=-\frac{n^3+n^2}{2n^4}+\frac{n^3-3n^2+2n}{2\,.\,3\,.\,n^4}=-\frac{2n^3+2n}{2.3.n^4}$ ; mais il faut ajouter $-\frac{n+n^2}{2n^4}$ ou $-\frac{3n+3n^2}{2.3.n^4}$ : donc le coefficient cherché sera $-\frac{2n^3+3n^2-n}{2\,.\,3\,.\,n^4}=\ldots\ldots$

$-\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{2\,.\,3}$ ; le mettant dans la onzième équation, on a $z$ ou $\sin\frac{E}{n}=\frac{y}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ ........

$$-\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)y^3x^{\frac{1}{n}-3}}{2\,.\,3}\text{, etc.}$$

88. Si vous supposez que l'arc dont on connoît les sinus et cosinus, est dans un rapport donné avec celui dont on veut déterminer les sinus et cosinus, dans le rapport, par exemple, $4:6$, et généralement $m:n$, on trouve de même qu'ayant

$$\sin e = y\ ,\quad \text{cosin } e = x\ ,\quad \sin \frac{ne}{m} = \frac{n}{m} y x^{\frac{n}{m}-1}$$
$$- \frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{n}{m}-2\right)}{2\ .\ 3} y^3 x^{\frac{n}{m}-3}, \text{ etc.}$$

89. Le cosinus s'évalueroit de la même manière.

PROBLÈME III$^e$. Connoissant le sinus de l'arc $e$, déterminer le sinus de l'arc $ne$ par le seul sinus connu, sans avoir besoin d'y employer le cosinus.

RÉSOLUTION. Pour résoudre cette question, il faut seulement faire quelques changemens à l'équation du n° 87, $y = \sin e \ldots\ldots x = \text{cosin } e$.

$$\sin ne = n y x^{n-1} - \overset{[p]}{\frac{n(n-1)(n-2)}{2\ .\ 3}} y^3 x^{n-3} + \ldots$$
$$\overset{[q]}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5}} y^5 x^{n-5}, \text{ etc.}$$

Dans cette équation, on n'a qu'à faire disparoître les $x$ par voie de substitution : pour cela je désignerai par $p$ le coefficient du second terme, et par $q$ celui du troisième. J'observe que dans la supposition du rayon égal à l'unité, on a

$$x = \overline{1 - y^2}^{\frac{1}{2}}\ .$$

Donc $x^{n-1} = \overline{1-y^2}^{\frac{n-1}{2}} \ldots x^{n-3} = \overline{1-y^2}^{\frac{n-3}{2}}$

Je réduis en série les seconds membres de ces équations, j'ai

$$x^{n-1} = 1 - \left(\frac{n-1}{2}\right)y^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{2^3}y^4, \text{ etc.};$$

$$x^{n-3} = 1 - \left(\frac{n-3}{2}\right)y^2 + \frac{(n-3)(n-5)}{2^3}y^4, \text{ etc.};$$

$$x^{n-5} = 1 - \left(\frac{n-5}{2}\right)y^2 + \frac{(n-5)(n-7)}{2^3}y^4, \text{ etc.}$$

Je substitue toutes ces valeurs dans l'équation sin $ne$.

Je trouve, en joignant toutes les parties résultant de chaque substitution,

$$\sin ne = ny - \frac{n(n-1)}{2}y^3 + \frac{n(n-1)(n-3)}{2^3}y^5, \text{etc.},$$

partie provenant du facteur $x^{n-1}$.

$+py^3 - \frac{(n-3)}{2}py^5$, etc., partie provenant du facteur $x^{n-3}$.

$+qy^5$, etc., partie provenant du facteur $x^{n-5}$.

Le calcul des coefficiens des $y^3$ donne $-\frac{n(n^2-1)}{2 \cdot 3} = -\frac{n(n-1)(n+1)}{2 \cdot 3}$.

Le calcul des coefficiens de $y^5$ donne,

1°. $+\frac{15n^3 - 60n^2 + 45n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$;

2°. $+\frac{10n^4 - 60n^3 + 110n^2 - 60n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$;

3°. $+\frac{n^5-10n^4+35n^3-50n^2+24n}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$.

La somme de toutes ces quantités donne

$$\frac{n^5-10n^3+9n}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}=\frac{n(n-1)(n+1)(n-3)(n+3)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}:$$

donc on aura

$$\sin ne=ny-\frac{n(n^2-1)}{2\,.\,3}y^3+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}y^5$$
$$-\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}y^7,\ \text{etc.}$$

90. Si le rayon étoit $r$, alors l'équation ci-dessus deviendroit

$$\sin ne=ny-\frac{n(n^2-1)}{2.3.r^2}y^3+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5.r^4}y^5,\text{etc.}$$

Par un calcul semblable à celui que nous avons fait au n° 87, en supposant que $y$ soit le sinus de l'arc E, en prenant la série inverse, on trouvera que

$$\sin\frac{E}{n}=\frac{y}{n}-\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)}{2\,.\,3\,.\,r^2}y^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)\left(\frac{1}{n^2}-9\right)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,r^4}y^5,\ \text{etc.}$$

91. Si on réfléchit bien sur ces dernières équations, on est conduit à plusieurs conclusions remarquables. En effet, dans l'avant-dernière, en supposant $n=\infty$, et l'arc $e$ infiniment petit, cet arc infiniment petit n'est pas distingué de son

sinus $e=y$; $ne$ égale $ny$ égale l'arc qui résulte de l'élément $e$ répété une infinité de fois, lequel arc je désigne par $a$; j'aurai donc $\sin a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5}$, etc., et c'est là l'expression du sinus d'un arc par son arc.

92. De même, dans la dernière équation, $n$ égalant $\infty$, $\frac{E}{n}$ peut être regardé comme l'élément infiniment petit de l'arc E : donc, dans cette équation, multipliant tout par $n$, négligeant, comme ci-dessus, ce qui doit être négligé, on aura

$$n \sin \frac{E}{n} = E = y + \frac{y^3}{2.3} + \frac{9y^5}{2.3.4.5} + \ldots \frac{9.25.y^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{, etc.}$$

C'est l'expression d'un arc par son sinus.

Mais comme c'est notre intention d'écarter, pour le moment, toute idée de l'infini, nous allons reprendre la méthode des coefficiens indéterminés.

## CHAPITRE VI.

*Usage des coefficiens indéterminés, pour le calcul des lignes trigonométriques.*

93. Nous avons eu ci-dessus,

$$\sin ne = z = ny - \frac{n(n^2-1)}{2.3}y^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}y^5$$

De cette équation on peut tirer des remarques qui établiront des principes dont nous aurons occasion de faire usage. Il s'ensuit, 1°. que l'ordonnée $z$ peut être regardée comme évaluée par la suite des puissances impaires d'un périmètre $ny$, affectées chacune de coefficiens particuliers ; car ayant

$$z = ny - \frac{n(n^2-1)}{2 \cdot 3} y^3, \text{ etc., on a aussi}$$

$$z = ny + \left(-\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot n^2}\right) n^3 y^3, \text{ etc.}$$

2°. Si dans le même quart de cercle on prend une autre ordonnée $z'$, et qu'on l'évalue par un périmètre régulier correspondant, auquel on donne le même nombre de division qu'avoit celui qui correspondoit à $z$, quoique les divisions ne soient pas les mêmes dans les premier et second périmètres, les coefficiens qui affecteront les puissances du second périmètre seront absolument les mêmes, puisqu'ils dépendent du nombre des divisions, et non de leur égalité : donc si l'on évalue $z$ par le périmètre infinitaire, c'est-à-dire, par son arc correspondant, et que l'on évalue de même $z'$ par son arc correspondant, les mêmes coefficiens qui affecteront les puissances du premier arc $c$, affecteront aussi celles du second arc $c'$; par conséquent si on a $z$ ou sin $c = Ac + Bc^3 + Dc^5$, etc., on aura aussi $z'$ ou sin $c' = Ac' + Bc'^3 + Dc'^5$.

3°. On ne prend que les puissances $c$, $c^3$, etc., parce que le sinus évalué par son périmètre correspondant quelconque, ne donne que ces puissances.

4°. Le coefficient du premier terme, quelque périmètre que l'on prenne, se trouve être 1 : donc $A = 1$.

94. Cela posé, nous allons appliquer la méthode des coefficiens indéterminés, à évaluer un sinus par son arc correspondant. Je fais,

1°. sin $c$ ou $z = Ac + Bc^3 + Dc^5$, etc.

Je prends le sinus de l'arc $e$, sous-double à l'arc $c$, et je le désigne par $t$, j'ai

2°. $t = Ae + Be^3 + De^5$;

3°. cosin $e$ ou $u = 1 - \frac{A^2e^2}{2} - ABe_4$, etc. $- \frac{A^4e^4}{8}$, etc.

Or, le double du sinus d'un arc sous-double, multiplié par son cosinus, égale le sinus de l'arc double $2tu = z$.

Je trouve par la multiplication,

4°. $tu = Ae + \left(B - \frac{1}{2}A^3\right)e^3 + \ldots\ldots\ldots \left(D - \frac{3A^2B}{2} - \frac{1}{8}A^5\right)e^5$, etc. : donc

$2tu = z = 2Ae + (2B - A^3)e^3 + \ldots\ldots\ldots \left(2D - 3A^2B - \frac{A^5}{4}\right)e^5$, etc. Or, $e = \frac{c}{2} \ldots\ldots$

$e^3 = \frac{c^3}{8} \ldots\ldots e^5 = \frac{c^5}{32}$ : donc j'aurai

5°. $z = Ac + \left(\frac{B}{4} - \frac{A^3}{8}\right)c^3 + \ldots\ldots\ldots \left(\frac{D}{16} - \frac{3A^2B}{32} - \frac{A^5}{128}\right)c^5$, etc.

Je compare cette équation avec la première ; je les soustrais l'une de l'autre, j'ai

$$6^\circ.\ \left.\begin{array}{l} Ac \ldots\ldots + Bc^3 \ldots\ldots + Dc^5, \text{etc.} \\ -Ac + \left(-\frac{B}{4} + \frac{A^3}{8}\right)c^3 + \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \left(-\frac{D}{16} + \frac{3A^2B}{32} + \frac{A^5}{128}\right)c^5, \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Nous avons vu que le premier coefficient $A = 1$. En calculant les coefficiens de $c^3$, nous trouvons $\frac{3B}{4} = -\frac{1}{8}$ ; d'où $B = -\frac{1}{2.3}$. Pour les coefficiens de $c^5$, nous trouvons, en substituant à la place de A et B, la valeur déjà trouvée pour ces quantités, $\frac{15D}{16} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = 0$ ; d'où $D = \frac{1}{2.3.4.5}$ : donc, en mettant ces coefficiens devant les puissances auxquelles ils appartiennent, on a

$$7^\circ.\ \sin c \text{ ou } z = c - \frac{c^3}{2.3} + \frac{c^5}{2.3.4.5}, \text{ etc.}$$

95. Le cosinus de l'arc $c$ est facile à déterminer ; car de l'équation $\text{cosin}^2 c = 1 - \sin^2 c$, nous trouvons, en réduisant en série,

$$8^\circ.\ \text{cosin}\, c = 1 - \frac{A^2}{2}c + \left(-AB - \frac{A^4}{8}\right)c^4, \text{ etc.}$$

Substituant à la place de A, B, leurs valeurs respectives, on trouve $\text{cosin}\, c = 1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{2.3.4}$, etc.

96. Pour évaluer un arc par son sinus, on peut employer les coefficiens indéterminés, ou la mé-

thode inverse des séries, et on a pour l'évaluation d'un arc $c$ par son sinus $z$,

$$c = z + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{3 z^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 z^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}, \text{ etc.}$$

97. On a, par la trigonométrie, la tangente d'un arc égale au sinus de cet arc divisé par son cosinus, ou $\tang c = \frac{\sin c}{\text{cosin } c}$. En divisant la série qui exprime la valeur de $\sin c$, par celle qui sert à exprimer la valeur de cosin $c$, nous avons,

1°. $\tang c = c + \frac{c^3}{3} + \frac{2c^5}{3 \cdot 5}$, etc. : donc, par la méthode inverse des séries, on a

2°. $c = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} -$, etc.

98. Pour avoir la cotangente, elle est égale à $\frac{\text{cosin } c}{\sin c}$, ou à $\frac{1}{\tang c}$ : on n'a qu'à substituer les valeurs respectives, $\cot c = \frac{1}{c + \frac{c^3}{3} + \frac{2c^5}{3 \cdot 5} +}$, etc.

$$\sec c = \frac{1}{\text{cosin } c} \; \ldots\ldots \; \text{cosée } c = \frac{1}{\sin c}.$$

Substituez, vous aurez toutes les lignes trigonométriques exprimées par des séries.

# CHAPITRE VII.

*Usage des séries, pour résoudre les équations du troisième degré.*

Quelques auteurs ont résolu les équations du troisième degré, qui ont trois racines réelles, par la table des sinus. Cette manière de les résoudre m'a conduit à une nouvelle résolution que je ne mettrai ici qu'après avoir exposé la méthode des auteurs.

99. D'après ce que nous avons vu ci-devant à l'équation du n° 90, $b$ étant le sinus d'un arc A du cercle dont le rayon est $r$, $x$ étant le sinus du tiers de cet arc, on a

1°. $b = 3x - \frac{4x^3}{r^2}$;

2°. $br^2 - 3r^2x + 4x^3 = 0$;

3°. $x^3 - \frac{3r^2x}{4} + \frac{br^2}{4} = 0$.

Comme dans le cas précédent $n = 3$, ou qu'il s'agit d'avoir le sinus d'un arc triple à celui dont $x$ est sinus, que nous prenions pour $x$ le sinus de l'arc $\frac{A}{3}$, ou celui de $\frac{180 - A}{3}$, ou celui de $-\frac{180 + A}{3}$, il nous donnera toujours $b$, qui est le sinus d'un arc triple, à savoir de A, de 180 — A,

et de $-180+A$. Il y a donc évidemment pour $x$ trois valeurs qui satisferont également à l'équation.

100. Quoiqu'il y ait une infinité d'autres arcs dont les sinus soient $b$, ils sont tels cependant que le sinus de leur tiers revient à une des quantités $\sin\frac{A}{3}$, $\sin\left(\frac{180-A}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{-180+A}{3}\right)$; par conséquent l'équation du troisième degré, que nous avons trouvée pour l'évaluation du tiers d'un arc, n'aura jamais que trois racines, comme cela doit être.

101. Cela posé, soit l'équation $x^3-px+q=0$. Si elle étoit $x^3-px-q=0$, il seroit facile de la ramener à la forme précédente, en faisant $x=-y$; je fais cette équation égale à la troisième ci-dessus, j'ai donc

$x^3-px\quad+q\quad=0$

$x^3-\frac{3r^2}{4}x+\frac{br^2}{4}=0$ : donc $p=\frac{3r^2}{4}\ldots\frac{4p}{3}=r^2$, $2\sqrt{\frac{p}{3}}=r$; de même $q=\frac{br^2}{4}$, $b=\frac{3q}{p}$ : donc, si l'on décrit un cercle dont le rayon soit $2\sqrt{\frac{p}{3}}$, l'arc de ce cercle, qui aura pour sinus $\frac{3q}{p}$, étant nommé A, on aura pour $x$, $x=\sin\frac{A}{3}$, ....

$x=\sin\left(\frac{180-A}{3}\right)$, $x=\sin\left(\frac{-180+A}{3}\right)$. Or, il est aisé d'avoir ces trois valeurs de $x$, ou de ces trois sinus, par des proportions très-simples; car puis-

que le rayon des tables est 1, on peut faire la proportion suivante, pour connoître l'arc A, ou l'arc auquel appartient le sinus $\frac{3q}{p}$ :

$$\frac{4p}{3} : 1 :: \frac{9q^2}{p^2} : z^2 ; \text{ donc } z^2 = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}.$$

Cette proportion donne le sinus de l'arc tabulaire $a$, correspondant à l'arc A, et par conséquent l'arc $a$ égale, pour le nombre de degrés, à l'arc A. Or, on connoît le sinus de $\frac{a}{3}$, de $\frac{(180^\circ - a)}{3}$, de $-\frac{(180^\circ + a)}{3}$; par conséquent, par une simple règle de trois, on connoîtra $\sin\frac{A}{3}$, $\sin\frac{(180^\circ - A)}{3}$; et $\sin - \frac{(180^\circ + A)}{3}$.

Exemple. Soit l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$, qui donne $p = 3$, $q = 1$. En faisant les proportions indiquées, on trouve pour cette équation $\sin a = \frac{1}{2}$, $a = 30^\circ$. Les trois valeurs de $x$, tous les calculs faits, sont $x = 0{,}3472964$, $x = 1{,}5320888$, $x = -1{,}8793852$.

102. De l'expression $ne = ny$, etc., dernière équation du n° 89, nous avons déduit l'expression du sinus d'un arc sous-double, sous-triple, et en général de $\sin\frac{E}{n}$; ce qui fait voir qu'une équation du troisième degré peut être résolue par la méthode inverse des séries. Nous allons expliquer cela d'une manière plus directe.

L'équation première du numéro précédent, $b = 3x - \frac{4x^3}{r^2}$, est la même que l'équation $\sin ne = z = ny - \frac{n(n^2-1)}{2 \cdot 3 \cdot r^2} y^3$, etc. Ce qui fait que dans la première équation il n'y a pas plus de deux termes au second membre, c'est que tous les termes qui devroient suivre celui où il y a $x^3$ deviennent o, par $n^2 - 9 = 0$, qui se trouve dans leurs coëfficiens. Or, dans la seconde, $y$ s'exprime (même numéro) en $z$ par la série inverse, ou

$$y = \frac{z}{n} - \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)}{2 \cdot 3 \cdot r^2} z^3, \text{ etc.}$$

Donc $x$, dans l'équation $b = 3x - \frac{4x^3}{r^2}$, doit s'exprimer en $b$ par la série inverse : donc ce retour a aussi lieu dans l'équation $q = px - x^3$, en faisant attention toutefois de regarder comme zéro les coefficiens de tous les termes qui pourroient être après $x^3$.

Or, dans l'équation $q = px + mx^3 + 0x^5$, etc., suivant les règles données pour le retour des séries, on a

$$x = \frac{q}{p} - \frac{mq^3}{p^4} + \frac{3m^2q^5}{p^7} - \frac{12m^3q^7}{p^{10}} + \frac{55m^4q^9}{p^{13}} - \frac{273m^5q^{11}}{p^{16}}, \text{ etc.}$$

Mais dans l'équation $q = px - x^3$, $m$ devient $-1$; par conséquent, dans cette même équation, le retour de $x$ est

$$x=\frac{q}{p}+\frac{q^3}{p^4}+\frac{3q^5}{p^7}+\frac{12q^7}{p^{10}}+\frac{55q^9}{p^{13}}+\frac{273q^{11}}{p^{16}}, \text{ etc.}$$

Nous mettons ici le tableau de l'opération qui a donné cette équation.

$$x=Aq+Bq^3+Cq^5+Dq^7+Eq^9+Fq^{11}+, \text{ etc.}$$

$$\begin{aligned} x^3= A^3q^3+3A^2Bq^5&+3A^2Cq^7+3A^2Dq^9+3A^2Eq^{11}, \text{ etc.}\\ &+3AB^2q^7+6ABCq^9+6ABDq^{11}, \text{ etc.}\\ &\qquad\qquad +B^3q^9+3AC^2q^{11}, \text{ etc.}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +3B^2Cq^{11}, \text{ etc.}\end{aligned}$$

Je substitue ces valeurs dans l'équation ci-dessus $q=px+mx^3$; j'aurai

$$\begin{aligned} q=Apq+Bpq^3&+Cpq^5+Dpq^7+Epq^9+Fpq^{11}, \text{ etc.}\\ +mA^3q^3&+3mA^2Bq^5+3mA^2Cq^7+3mA^2Dq^9+3mA^2Eq^{11}, \text{ etc.}\\ &+3mAB^2q^7+6mABCq^9+6mABDq^{11}, \text{ etc.}\\ &\qquad\qquad +mB^3q^9+3mAC^2q^{11}, \text{ etc.}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +3mB^2Cq^{11}, \text{ etc.}\end{aligned}$$

Dans cette dernière équation on a, 1°. $A = \frac{1}{p} \ldots$;
2°. $B = -\frac{m}{p^4} \ldots\ldots Cp + 3mA^2B = 0 \ldots\ldots$;
$Cp = -\frac{3m}{p^2} \cdot -\frac{m}{p^4} \ldots\ldots$ 3°. $C = \frac{3m^2}{p^7} \ldots\ldots$;
$Dp = -\frac{3m}{p^2}\frac{(3m^2)}{p^7} - \frac{3m}{p} \cdot \frac{m^2}{p^8} \ldots$ 4°. $D = -\frac{12m^3}{p^{10}}$.
Calculez de même E et F, vous trouverez,
5°. $E = \frac{55m^4}{p^{13}}$; 6°. $F = -\frac{273m^5}{p^{16}}$.

103 La formule en série, que nous venons de trouver par les coefficiens indéterminés, pour avoir la valeur de $x$ dans une équation du troisième degré, peut être déduite de la formule générale qui contient l'expression

$$\sin\frac{E}{n} = \frac{y}{n} - \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)y^3}{2.3.r^2} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\left(\frac{1}{n^2} - 9\right)y^5}{2.3.4.5.r^4}, \text{ etc.}$$

Cette dernière série est un retour de la série $b = 3x - \frac{4x^3}{r^2}$, ou de la série $q = px - x^3$, en prenant $y = \frac{3q}{p}$; $\sin\frac{E}{n} = x \ldots\ldots n = 3 \ldots\ldots \frac{4p}{3} = r^2$. En faisant les substitutions indiquées, on trouve pour $x$ la même valeur en série que ci-dessus; ce qui donne une nouvelle preuve de l'exactitude de la formule $\sin\frac{E}{n} = \frac{y}{n}$, etc.

La substitution me donne

$$x=\frac{3q}{np}-1\left(\frac{1-n^2}{2.3}\right)\frac{n}{4p}\cdot\frac{q^3}{p^3}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1\left(\frac{1-n^2}{2.3}\right)\left(\frac{1-9n^2}{4.5}\right)\frac{n^2}{4^2\cdot p^2}\cdot\frac{q^5}{p^5}\ldots\ldots\ldots$$

$$-1\left(\frac{1-n^2}{2.3}\right)\left(\frac{1-9n^2}{4.5}\right)\left(\frac{1-25n^2}{6.7}\right)\frac{n^3}{4^3\cdot p^3}\cdot\frac{q^7}{p^7},\text{ etc.}$$

103. Dans cette série, la loi des coefficiens devient évidente; car on voit que chaque coefficient suivant est égal à un produit qui a ces trois facteurs : 1°. le coefficient précédent; 2°. 1 et la quantité $-n^2$ prise autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré de l'exposant de $q$ au terme précédent : ce second facteur doit être toutefois divisé par le produit de deux nombres qui se trouvent dans la suite des nombres naturels, immédiatement après celui qui marque le même exposant de $q$ au terme précédent; 3°. le dernier facteur des coefficiens est $\frac{n}{4}$ : de manière que dans un terme quelconque, appelant A le coefficient précédent, B l'exposant de $q$ au même terme, j'ai pour l'expression du coefficient suivant, $A\left(\frac{1-B^2n^2}{\overline{B+1}\,.\,\overline{B+2}}\right)\frac{n}{4}$.

On voit d'ailleurs que pour la loi des exposans de $\frac{q}{p}$, au second terme il faut multiplier $\frac{q}{p}$ par $\frac{q^2}{p^3}$, ensuite au troisième terme il faut multiplier $\frac{q^3}{p^4}$ par $\frac{q^2}{p^3}$, etc. En substituant, on trouve comme ci-dessus,

$$x = \frac{q}{p} + \frac{q^3}{p^4} + \frac{3q^5}{p^7} + \frac{12q^7}{p^{10}}, \text{ etc.}$$

104. Revenons à présent à notre formule

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}},$$

expression qui se déduit de l'équat. $x^3 - px + q = 0$. Si on a $\frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27}$, alors le radical carré est réel, et on peut employer l'extraction ; si on a $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$, alors la quantité sous le radical carré est imaginaire, et par conséquent ne peut être réduite par voie d'extraction. Mais dans le cas de $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$, multipliant tout par 9, ensuite par 4, divisant tout par $p^2$, nous avons $\frac{9q^2}{p^2} < \frac{4p}{3}$ : donc $\frac{3q}{p} < 2\sqrt{\frac{p}{3}}$. Le rayon que l'on prend est donc alors plus grand que le sinus, comme cela doit être. On trouvera donc alors, par la table des sinus ou par les séries, les trois valeurs de $x$.

Lorsque de $2\sqrt{\frac{p}{3}}$ à $\frac{3q}{p}$, il y a peu de différence, la série est peu convergente ; mais si elle est de cette nature, il suffit de connoître les premiers chiffres de la valeur de $x$ : les autres chiffres se détermineront par des procédés que nous indiquerons bientôt.

105. On peut appliquer la formule trouvée à

l'équation $x^3 - 5x + 3 = 0$. Les cinq premiers termes de la série donnent les quantités suivantes :

0,600000
0,043200
0,009330
0,002687
0,000886

0,656, etc.

Les fractions continues, comme nous le verrons dans la troisième partie, nous donneront un moyen d'évaluer sans peine un grand nombre de termes.

La formule en série, que nous venons de trouver pour évaluer la plus petite valeur de $x$ dans l'équation $x^3 - px + q = 0$, peut aussi s'appliquer à l'équation de la forme $x^3 + px - q = 0$; alors elle devient

$$x = \frac{q}{p} - \frac{q^3}{p^4} + \frac{3q^5}{p^7} - \frac{12q^7}{p^{10}}, \text{ etc.}$$

Dans ce cas, lorsqu'on a $q^2 > p^3$, elle est divergente ; mais nous donnerons un moyen de la modifier, de manière à ce qu'elle converge vers la vraie valeur.

# TROISIÈME PARTIE.

*Des fractions continues.*

## CHAPITRE Ier.

*Premières notions sur les fractions continues : leur réduction à des fractions ordinaires.*

106. ON peut toujours avoir au moins une valeur de $x$ dans une équation quelconque de degré impair $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$, etc. $+ p = 0$, en employant la méthode inverse des séries ; mais pour évaluer ensuite les termes de la nouvelle série, il faudroit faire des calculs dont la longueur est quelquefois très-rebutante : les fractions continues sont, dans ce cas, très-utiles pour faciliter et abréger les opérations.

107. J'appelle fraction continue une fraction dont le dénominateur est composé d'un nombre entier et d'une fraction, laquelle a aussi pour dénominateur un entier et une fraction composée de la même manière.

108. De ces premières notions, il suit que toute fraction continue peut être représentée par les deux expressions suivantes:

$$a+\cfrac{m}{b+\cfrac{n}{c+\cfrac{p}{d+\cfrac{q}{e+\cfrac{r}{f, \text{ etc.}}}}}} \qquad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f, \text{ etc.}}}}}}$$

La première expression représente une fraction continue dont les numérateurs sont des nombres quelconques, et la seconde représente une fraction dont les numérateurs sont des unités.

Nous parlerons de ces deux espèces de fractions, et nous verrons le grand avantage qu'on en tire pour la résolution des équations des degrés supérieurs.

109. La première fraction continue donne les équations suivantes, que l'on trouve en s'arrêtant successivement au premier, second ou troisième terme.

1°. $\frac{1}{0}=\infty$;

2°. $a=a$;

3°. $a+\frac{m}{b}=\frac{ab+m}{b}$;

4°. $a+\cfrac{m}{b+\cfrac{n}{c}}=\frac{abc+na+mc}{bc+n}$;

5°. $a+\cfrac{m}{b+\cfrac{n}{c+\cfrac{p}{d}}}=\frac{abcd+nad+mcd+pab+mp}{bcd+nd+pb}$.

110. Quoique dans les fractions ordinaires, celles à savoir qui composent le second membre de ces équations, on ne connoisse pas à la première vue comme chaque fraction se compose et comme elle dépend des précédentes; cependant, avec un peu d'attention, cette formation se découvre facilement. En effet, comme ces fractions doivent être alternativement plus grandes et plus petites par rapport à la vraie quantité qu'elles représentent, on prend pour la première $\frac{1}{0}$, et la seconde est naturellement $\frac{a}{1}$.

Cela posé, en observant attentivement, on trouve que dans chaque fraction ordinaire, dans la troisième, par exemple, $\frac{ab+m}{b}$, le numérateur est composé du produit du numérateur de la précédente, multiplié par le dénominateur $b$ du terme fractionaire $\frac{m}{b}$, plus du numérateur de l'avant-précédente, multiplié par le numérateur $m$ : de même le dénominateur est composé du produit du dénominateur de la précédente, multiplié par le dénominateur $b$, plus du produit du dénominateur de l'avant-précédente, multiplié par le numérateur $m$.

111. Pour réduire donc les fractions continues à des fractions ordinaires, on dispose les termes de chaque fraction individuelle suivante de la fraction continue, de manière que le dénominateur

de cette fraction individuelle soit au-dessus, et le numérateur au-dessous de la fraction ordinaire déjà formée. Disposez donc ainsi la fraction :

$$a + \cfrac{m}{b + \cfrac{n}{c + \cfrac{p}{d + \cfrac{q}{e, \text{ etc.}}}}}$$

$$\begin{array}{cccc} & b & c & d \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+m}{b}, & \frac{abc+na+mc}{bc+n}, \\ & m & n & p \end{array}$$

$$\begin{array}{c} e \\ \frac{abcd+nad+mcd+pab+mp}{bcd+nd+pb}. \\ q \end{array}$$

112. Cette disposition faite, pour avoir une fraction suivante, on prend le produit du numérateur de la précédente par la quantité littérale qui est au dessus, ensuite le produit du numérateur de l'avant-précédente par la quantité littérale qui est au-dessous; on ajoute les deux produits, la somme donne le numérateur de la fraction suivante.

De même aussi, son dénominateur sera composé du produit du dernier dénominateur par la quantité qui est au-dessus, et du produit de l'avant-dernier dénominateur par la quantité qui est au-dessous.

113. Si l'on pousse le calcul jusqu'à ce qu'on ait une fraction qui contienne tous les termes de la fraction continue, alors on a la juste valeur de

la quantité qu'elle représente. Si l'on s'arrête à une fraction qui ne renferme qu'un certain nombre de termes de la fraction continue, alors on n'a qu'une valeur plus ou moins approchée, selon que l'on prend plus ou moins de termes.

114. Désignons par $x$ la vraie valeur de la fraction continue; il est clair que la première fraction $\frac{1}{0}$ est plus grande que $x$, la seconde $\frac{a}{1}$ est plus petite que $x$, la troisième $\frac{ab+m}{b}$ ou $a+\frac{m}{b}$ est plus grande que $x$, parce que la quantité $b$ étant dénominateur dans le terme où elle se trouve, est diminuée de toutes les quantités qui la suivent : donc la fraction $\frac{m}{b}$ est trop grande.

La fraction $\frac{abc+na+mc}{bc+n}$ est trop petite, car on a $\frac{abc+na+mc}{bc+n}=a+\frac{m}{b}-\frac{mn}{b^2c+nb}$. Je remarque que la quantité négative, représentée par le troisième terme $-\frac{mn}{b^2c+nb}$, est trop grande, puisque la partie $c$ de son dénominateur est trop petite. Or, prendre une quantité négative trop grande, c'est rendre le tout trop petit : d'où il suit que, les termes des fractions individuelles étant positifs, deux fractions immédiates donnent les limites entre lesquelles se trouve la vraie valeur de $x$.

Si l'on suppose qu'il n'y ait point de nombre entier dans la fraction continue, ou que l'on ait simplement des fractions de la forme

$$\cfrac{m}{b+\cfrac{n}{c+\cfrac{p}{d+\cfrac{q}{e}}}},$$

alors, en opérant comme ci-dessus, on aura successivement pour la valeur de $x$,

$$\frac{m}{b},\ \frac{mc}{cb+n},\ \frac{mdc+mp}{bdc+pb+nd},$$

$$\frac{medc+mqc+mpe}{bedc+bqc+bpe+ned+nq}.$$

---

## CHAPITRE II.

### *Méthode des analistes, pour transformer une fraction continue en série.*

115. ON peut donner à ces fractions une autre forme qui nous découvrira plusieurs vérités importantes.

Par les vérités déjà démontrées, $\frac{m}{b}$ est une quantité plus grande que $x$, juste valeur de la fraction continue, plus grande que $\frac{mc}{bc+n}$ : appelant donc $D'$ la différence de la première à la seconde frac-

tion, D″ la différence de la seconde à la troisième, j'aurai $\frac{m}{b} - D' = \frac{mc}{cb+n}$, ensuite $\frac{mc}{cb+n} + D'' = \frac{mdc+mp}{bdc+pb+nd}$, $\frac{mdc+mp}{bdc+pb+nd} - D''' = \frac{medc+mqc+mpe}{bedc+bqc+bpe+ned+nq}$.

En calculant toutes ces différences, on trouve,

1°. $\frac{mc}{cb+n} = \frac{m}{b} - \frac{mn}{b(cb+n)}$;

2°. $\frac{mdc+mp}{bdc+pb+nd} = \frac{m}{b} - \frac{mn}{b(cb+n)} + \ldots \frac{mnp}{(cb+n)(bdc+pb+nd)}$;

3°. $x = \frac{medc+mqc+mpe}{bdce+bqc+bpe+ned+nq} = \frac{m}{b} - \frac{mn}{b(cb+n)} + \frac{mnp}{(cb+n)(bdc+pb+nd)} - \frac{mnpq}{(bdc+pb+nd)(bdce+bqc+bpe+ned+nq)}$.

116. Ces différens tableaux, qui sont autant d'expressions approchant toujours de plus en plus de la valeur de la fraction continue, nous font voir que si $n, p, q$, sont des nombres qui ne croissent pas trop, cette valeur est exprimée par une série très-convergente.

On peut juger, d'après ces formules, de la quantité d'approximation de chaque fraction.

Pour cela, prenons pour exemple la seconde

fraction qui, par la transformation que nous venons de faire, $= \frac{m}{b} - \frac{mn}{b(cb+n)}$; faisons l'erreur de cette fraction $= e$, la vraie quantité $= x$. J'ai $\frac{m}{b} - \frac{mn}{b(cb+n)} + e = x$; nous avons vu $\frac{m}{b} - \frac{mn}{b(cb+n)} + \frac{mnp}{(cb+n)(bdc+pb+nd)} > x$ : donc $\frac{m}{b} - \frac{mn}{b(cb+n)} + \frac{mnp}{(cb+n)(bdc+pb+nd)} > \frac{m}{b} - \frac{mn}{b(cb+n)} + e$ :

donc on a $\frac{mnp}{(cb+n)(bdc+pb+nd)} > e$; c'est-à-dire que l'erreur de la seconde fraction est plus petite que le produit des numérateurs des trois premiers tèrmes de la fraction continue, divisé par le produit composé du dénominateur de cette fraction et de celui de la fraction suivante.

117. Par un calcul semblable, on trouveroit que l'erreur de la troisième fraction est plus petite que le produit des numérateurs des quatre premiers termes de la fraction continue, divisé par le produit composé du dénominateur de cette fraction et du dénominateur de la suivante.

---

# CHAPITRE III.

*Transformation d'une série ordinaire en fraction continue.*

118. **P**AR la forme que nous avons donnée à la fraction continue, nous l'avons changée en une série ordinaire; on pourra aussi changer celle-ci en une fraction continue.

Soit la série A — B + C — D + E — F, etc.

Je représente la valeur de cette série par la fraction continue

$$\cfrac{m}{b+\cfrac{n}{c+\cfrac{p}{d+\cfrac{q}{e, \text{ etc.}}}}}$$

$m$, $n$, $p$, etc., $b$, $c$, $d$, etc., étant des indéterminés qu'il nous sera facile de trouver et d'exprimer par les quantités A, B, C, D, etc., la fraction continue indéterminée égale la série $\frac{m}{b}$ —

$$\frac{mn}{b(bc+n)}+\frac{mnp}{(cb+n)(bdc+pb+nd)}-\ldots.$$
$$\frac{mnpq}{(bdc+pb+nd)(bdce+bqc+bpe+ned+nq)}.$$

Cette série doit être égale à la série A — B, etc. Je les compare terme par terme; et observant qu'une fraction dont les deux termes sont déterminés, étant comparée avec une autre dont les deux termes sont indéterminés, on peut donner au numérateur

indéterminé la valeur que l'on veut, j'ai cette suite d'équations :

$\frac{A}{1}=\frac{m}{b}\ldots\ldots B=\frac{mn}{b(cb+n)}$, $A=m$, $B=1$ : d'où $\frac{B}{A}=\frac{n}{c+n}$ ; d'où $Bc+Bn=An$ ; d'où $n=\frac{Bc}{A-B}$. Je substitue ces valeurs dans la fraction continue indéterminée

[g] $\cfrac{m}{n+\cfrac{n}{c+\cfrac{p}{d}}}$; elle devient [h] $\cfrac{A}{1+\cfrac{B}{A-B+\cfrac{p}{d}}}$, etc.

Je reviens à l'équation $\frac{B}{A}=\frac{n}{c+n}$ ; $n$ n'étant pas encore absolument déterminée, je fais $B=n$, et j'ai $A=c+n$. Je remarque maintenant que ...

$$\frac{C}{B}=\frac{mnp}{(cb+n)(bdc+pb+nd)}\times\frac{mn}{b(cb+n)}=\frac{pb}{bdc+pb+nd}$$

: donc on a, à cause de $b=1$, $A=c+n$, $p=\frac{Ccd+Cnd}{B-C}=\frac{ACd}{B-C}$. Je substitue cette valeur de $p$ dans la fraction $h$ indéterminée, quant à son dernier terme, et j'ai

[h'] $\cfrac{A}{1+\cfrac{B}{A-B+\cfrac{AC}{B-C+\cfrac{q}{e}}}}$

J'avois tout à l'heure $p = \frac{ACd}{B-C}$, d'où $\frac{p}{d} = \frac{AC}{B-C}$. Je fais $p = AC$, d'où $d = B - C$ ; j'observe maintenant que $\frac{C}{D} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{mnpq}{(bdc+pb+nd)(bdce+bqc+bpe+ned+nq)}$$

$$\times \frac{mnp}{(cb+n)(bdc+pb+nd)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{q(cb+n)}{bdce+bqc+bpe+ned+nq}.$$

Calculant cette équation comme ci-dessus, et substituant toutes les quantités déjà trouvées pour $m$, $n$, etc., $b$, $c$, etc., on arrive à cette équation finale $q = \frac{BDe}{C-D}$.

Voici le calcul tout fait, etc.

$A - B = c \ldots\ B - C = d \ldots\ AC = p \ldots\ B = n \ldots$

$Ddce + Dqc + Dpe + Dned + Dnq = AqC.$

$Ddce + Dpe + Dned = AqC - Dqc - Dqn.$

$De(dc + p + nd) = AqC - Dqc - Dnq.$

$De(AB - B^2 - AC + BC + AC + B^2 - BC) = AqC - Dqc - Dnq.$

$De \times AB = ACq - Dqc - Dnq$ ; d'où $De \times AB = (AC - Dc - Dn) \times q.$

$De \times AB = (AC - AD + BD - BD) \times q$ ; . . . . . .

d'où $q = \frac{BDe}{C-D}$.

Je substitue cette valeur dans la fraction con-

tinue indéterminée ; j'opère de même, par rapport aux termes suivans, et je trouve que si on a $x = A - B + C - D + E - F$, etc., on a aussi l'expression suivante pour désigner la même valeur :

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{B}{A - B + \cfrac{AC}{B - C + \cfrac{BD}{C - D + \cfrac{CE}{D - E, \text{ etc.}}}}}}$$

119. Si les termes de la série étoient des nombres fractionnaires, de manière qu'elle fût de la forme suivante, $x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D}$, etc., on compareroit de même cette série et la série indéterminée, terme par terme, on auroit

$\frac{1}{A} = \frac{m}{b}$, $\frac{mn}{b(cb+n)} = \frac{1}{B}$, $m = 1$, $A = b$,

$\frac{1}{B} \times \frac{1}{A} = \frac{A}{B} = \frac{n}{cb+n}$, $Acb + An = Bn$, $n = \frac{Acb}{B - A}$,

$n = \frac{A^2 c}{B - A}$. Je substitue cette valeur dans la fraction continue indéterminée ; j'opère comme au numéro précédent, et je trouve

$$x = \cfrac{1}{A + \cfrac{A^2}{B - A + \cfrac{B^2}{C - B + \cfrac{C^2}{D - C, \text{ etc.}}}}}$$

120. Soit à présent la série $x = A - Bz + Cz^2 -$

$Dz^3 + Ez^4$, etc. ; un calcul semblable à celui que nous avons fait dans les numéros précédens, donne

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{Bz}{A - Bz + \cfrac{ACz}{B - Cz + \cfrac{BDz}{C - Dz, \text{ etc.}}}}}$$

On peut, par le moyen de la transformation du n° 119, avoir une fraction continue qui exprime le rapport de la circonférence au rayon.

121. On sait que l'arc de 45°, dont le rayon est 1, exprimé par sa tangente, donne . . . . . . $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$, etc. ; substituant à la place de A, B, C, D, etc., les nombres 1, 3, 5, on trouve

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2, \text{ etc.}}}}}}$$

# CHAPITRE IV.

*Nouvelle méthode pour transformer les séries en fractions continues : formules très-utiles qu'on en déduit.*

122. LA transformation de la série $A - Bz + Cz^2$, etc., en fraction continue, telle que nous l'avons donnée, n'abrége pas toujours les calculs. En effet, si l'on essaye de ramener cette fraction continue à une fraction ordinaire, on est conduit à la même série que l'on avoit.

Il est une autre transformation, d'autant plus utile, que la fraction continue qui en résulte est ramenée elle-même à une fraction ordinaire algébrique qui abrége beaucoup le calcul. Voici donc le problème qu'il s'agit de résoudre.

123. Une série étant donnée, trouver une fraction ordinaire qui donne l'évaluation de la série jusqu'à un certain nombre de termes. Nous prendrons la série suivante, qui nous servira à connoître la racine réelle, ou une des racines réelles (dans le cas qu'il y en ait trois), dans une équation du troisième degré.

$1 - x + 3x^2 - 12x^3 + 55x^4 - 273x^5 + \ldots\ldots$
$1428x^6 - 7752x^7 + 43263x^8 - 246675x^9 + \ldots$
$1430715x^{10}$, etc.

La réduction de cette série à une fraction con-

tinue, peut se faire, par voie de division, de la manière suivante :

Je remarque que la quantité 1 ou $\frac{1}{1}$ doit être diminuée de la quantité exprimée par les termes suivans, $-x+3x^2$, etc. Or, pour diminuer une fraction, il ne s'agit que d'augmenter son dénominateur ; j'appelle $z'$ le terme d'accroissement donné au dénominateur ; je fais $-x+3x^2$, etc. $=-s'$ ; j'ai $\frac{1}{1+z'}=1-s'$, ensuite $1=1+z'-s'-s'z'$ : donc $z'=\frac{s'}{1-s'}$ ; donc on a $z'=$ . . . . .
$\frac{x-3x^2+12x^3,\text{ etc.}}{1-x+3x-12x^3,\text{ etc.}}=x-2x^2+7x^3$, etc. ; donc, appelant $y$ la série donnée, on aura $y=\frac{1}{1+x-2x^2+7x^3,\text{ etc.}}$ Dans cette nouvelle expression, je remarque que $x$ doit être diminuée. Or, pour opérer cette diminution, il n'y a qu'à augmenter son dénominateur 1 : après l'opération faite, on trouve

$$y=\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+2x-3x^2+10x^3,\text{ etc.}}}$$

124. On fait par rapport à $2x$ comme on a fait par rapport à $x$ ; mais cette méthode devient fort longue. Voici comme on peut continuer l'opération. Lorsqu'on a déjà les deux premières fractions qui commencent la fraction continue, je désigne

la fraction continue égale à $y$, par

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+zx.}}$$

Je forme sur cette expression les deux premières fractions ordinaires $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1+x}$; pour avoir la troisième, je suis la règle donnée.

Je mets le dénominateur 1 du terme $\frac{zx}{1}$ au-dessus du numérateur de la seconde fraction ordinaire, et au-dessous de son dénominateur le numérateur $zx$, de la manière qui suit :

$$\frac{1}{1}, \quad \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{1+x} \\ zx \end{matrix}$$

Je forme la troisième fraction ordinaire, suivant la règle donnée n° 111 ; j'ai pour troisième fraction ordinaire $\frac{1+zx}{1+x+zx}$. Cette troisième fraction ordinaire doit être égale, jusqu'au troisième terme, à la série $1-x+3x^2-12x^3$, etc. : donc cette série, multipliée par le dénominateur $1+x+zx$, doit égaler le numérateur. J'ai donc

$$\begin{aligned} 1+zx = 1 &- x + 3x^2, \text{ etc.} \\ &+ x - x^2, \text{ etc.} \\ &+ zx - zx^2, \text{ etc.} \end{aligned}$$

On voit dans cette équation qu'en faisant passer toutes les quantités dans le second membre, chaque

colonne se détruit, et devient égale à zéro; d'où l'on a $z=2$.

125. Il suit du tableau de cette opération, et de toutes celles que l'on peut faire en cherchant de la même manière la fraction individuelle qui doit être la quatrième, la cinquième, la sixième dans la fraction continue; il suit que pour trouver $z'$, $z''$, etc., la colonne de la plus grande puissance de $x$, à laquelle on s'arrête, doit être égale à zéro : il suffit donc de chercher la partie du produit qui doit composer la dernière colonne, et de l'égaler à zéro. Voici comme on effectue cette opération. Je désigne par $a+bx+ax^2$ la série $1+x+3x^2$, etc., ou toute autre série; j'écris $\frac{1+zx}{1+x+zx}$, $=a+bx+cx^2$, etc. Comme c'est au troisième terme que je m'arrête, je n'ai besoin que de prendre les termes du produit où il entre des $x^2$, c'est-à-dire, $cx^2 \times 1 + bx \times \overline{x+zx}$. . . . On met le dernier terme de la série $+cx^2$ au-dessous de 1, le second $bx$ au-dessous de $x+zx$, de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} 1 & +x+zx \\ cx^2 & +bx; \end{array}$$

on multiplie le terme qui est dessous par celui ou ceux qui sont dessus; on a $cx^2+bx^2+bzx^2=0$.

Si le dénominateur étoit $m+nx+qx^2$, etc., $+pzx+rzx^2$ et que la série fût $a+bx+cx^2+dx^3$, etc.; comme c'est aux $x^3$ qu'il faut s'arrêter, on écriroit

$$\begin{matrix} m + nx + pzx + qx^2 + rzx^2 \\ dx^3 + cx^2 \qquad + bx; \end{matrix}$$

ensuite on multiplieroit $dx^3$ par $m$, $cx^2$ par $nx + pzx$, $bx$ par $qx^2 + rzx^2$; on égaleroit le produit qui résulteroit de cette multiplication à zéro, et on auroit $z$. En un mot, il faut prendre les termes de la série à l'inverse, et mettre le dernier terme de cette série, celui à savoir où on veut s'arrêter, sous le premier du dénominateur, l'avant-dernier de la série sous le second du dénominateur, etc.

126. Revenons à présent à la troisième fraction ordinaire $\frac{1+zx}{1+x+zx}$. Je substitue à la place de $z$ sa valeur trouvée $+2$, j'ai pour troisième fraction continue

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1}}}$$

et pour troisième fraction ordinaire $\frac{1+2x}{1+3x}$. Ces deux expressions sont égales à la série donnée $1 - x + 3x^2$, jusqu'au troisième terme, comme on peut le voir en divisant $1+2x$ par $1+3x$. Je forme la quatrième fraction ordinaire par un procédé semblable; je désigne par $\frac{zx}{1}$ la fraction qui doit être après $\frac{2x}{1}$; j'écris, suivant la règle donnée,

$$\frac{1}{1+x},\quad \begin{matrix} 1 \\ \hline 1+2x \\ \hline 1+3x \\ zx \end{matrix}.$$

Je fais les opérations marquées; j'ai pour quatrième fraction $\frac{1+2x+z'x}{1+3x+z'x+z'x^2}$. Je prends les quatre premiers termes de la série $1-x+3x^2-12x^3$, etc.: comme c'est aux $x^3$ que l'on veut s'arrêter, on ne cherchera que la partie du produit où il doit y avoir des $x^3$, comme on a dit au n° 125; et pour cela je dispose de la manière indiquée au même n° 125, les termes de la série donnée, et ceux du dénominateur, de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} 1 & +3x+z'x+z'x^2 \\ -12x^3+3x^2 & -x; \end{array}$$

j'ai $-12x^3+9x^3+3z'x^3-z'x^3=0 \ldots z'=\frac{3}{2}$: donc la fraction qui doit être ajoutée au dénominateur de $\frac{2x}{1}$ est $\frac{3x}{2}$; la fraction continue devient donc

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{2}}}}$$

Je forme la fraction ordinaire qui doit en résulter; j'écris

$$\frac{1}{1+x}, \quad \cfrac{2}{\cfrac{1+2x}{\cfrac{1+3x}{3x}}};$$

j'ai, toutes les opérations faites, $\frac{2+7x}{2+9x+3x^2}$.

Ces deux fractions sont égales à la série donnée, jusqu'au quatrième terme, comme on peut le voir en effectuant la division.

En continuant à opérer de la sorte, on trouve que la série $1 - x + 3x^2 - 12x^3 + 55x^4 - 273x^5 + 1428x^6 - 7752x^7$, etc., est égale à la fraction continue

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{3x}{2 + \cfrac{11x}{3 + \cfrac{26x}{11 + \cfrac{85x}{13 + \text{, etc.}}}}}}}}$$

1°. $1$ . . . . . 2°. $\frac{1}{1+x}$ . . . . . 3°. $\frac{1+2x}{1+3x}$ . . . .

4°. $\frac{2+7x}{2+9x+3x^2}$ . . . . 5°. $\frac{3+16x+11x^2}{3+19x+21x^2}$ . . . .

6°. $\frac{11+76x+101x^2}{11+87x+155x^2+26x^3}$ . . . . . . . . . . . .

7°. $\frac{13+113x+243x^2+85x^3}{13+126x+330x^2+193x^3}$.

On peut réduire d'une manière semblable, en fraction continue, toute autre espèce de série qui comprend une progression géométrique, et en déduire une formule qui renferme la sommation des termes de la série, jusqu'à un nombre proposé de termes.

---

# CHAPITRE V.

*Usage des formules précédentes.*

127. Ces différentes formules sont des expressions qui donnent la valeur de la quantité qu'elles représentent, à un plus haut ou à un plus bas degré d'exactitude, suivant qu'elles renferment plus ou moins de termes de la fraction continue; elles nous conduiront facilement à connoître les premiers chiffres de la seule racine réelle de $y$ dans l'équation $y^3+py-q=0$. En représentant par $x$ la quantité $\frac{q^2}{p^3}$, par laquelle chaque terme suivant est multiplié, on a, comme il suit du n° 105, seconde partie, $y=\frac{q}{p}(1-x+3x^2-12x^3$, etc.)

On n'a qu'à substituer à la place de la série qui est après le crochet une des formules ou fractions ci-dessus trouvées, et on a la valeur de $y$.

128. Dans ce cas où la série donnée a ses termes alternativement en plus et en moins, les fractions ordinaires qui résultent de la fraction continue sont alternativement plus grandes et plus petites que la quantité qui est représentée par l'ensemble de toute la fraction continue; dans ce cas, deux fractions immédiates donnent les limites entre lesquelles se trouve la vraie valeur de l'inconnue.

Lorsque $q^2$ est plus petit que $p^3$, la série est très-convergente; lorsque $q^2$ est plus grand que $p^3$, la série est divergente; mais, dans ce cas, on se contente de connoître les premiers chiffres de la valeur de $y$, et nous donnerons bientôt une autre formule pour trouver les autres.

129. Les formules trouvées servent aussi à faire connoître la plus petite racine positive de l'équation $y^3 - py + q = 0$, dans le cas où l'équation a trois racines, c'est-à-dire, dans le cas où $4p^3$ est plus grand que $27q^2$.

En effet, dans ce cas, la disposition des signes est telle, n° 103, qu'en désignant par $x$ la quantité $\frac{q^2}{p^3}$, la méthode inverse des séries donne pour $y$, $y = \frac{q}{p}(1 + x + 3x^2$, etc.) Or, si l'on change dans les formules trouvées les signes des puissances impaires, ces formules deviennent l'expression de cette dernière série, comme on peut le voir en prenant, par exemple, $\frac{2 - 7x}{2 - 9x + 3x^2}$, et opérant la division.

130. Ces nouvelles formules fractionaires, où les termes du numérateur et ceux du dénominateur sont alternativement positifs et négatifs, diffèrent des premières, en ce qu'au lieu que celles-là étoient alternativement plus grandes et plus petites que $y$, celles-ci, au contraire, sont toutes plus petites que $y$. Cela n'empêche pas que deux

fractions immédiates ne fassent connoître jusqu'à quel ordre de chiffres la fraction numérique, calculée sur la fraction algébrique, est juste; car il est évident qu'en prenant deux fractions immédiates, les chiffres communs à l'une et à l'autre composent nécessairement les premiers chiffres de la valeur exacte de $y$.

## CHAPITRE VI.

### *Séries imaginaires.*

131. ON appelle quantités imaginaires, celles qui renferment de l'impossible, comme $\sqrt{-a^2}$; car il n'y a aucune quantité qui, multipliée par elle-même, ait donné $-a^2$.

J'appelle de même série imaginaire celle qui renferme de l'impossible.

132. Soit l'équation $y^3-py+q=0$, où on suppose $27q^2>4p^3$, cas où deux racines sont imaginaires, comme nous avons trouvé n° 21. Or, le dernier terme du produit de deux racines imaginaires, multipliées l'une par l'autre, est nécessairement positif : donc la racine réelle de la présente équation est négative; mais la série qui se forme sur cette équation est positive, ou égale à $\frac{q}{p}+\frac{q^3}{p^4}+\frac{3q^5}{p^7}$, ce qui est impossible : donc cette série, prise avec les signes qui se présentent naturellement, est imaginaire.

# CHAPITRE VII.

*Manière de procéder quand la série est imaginaire, et comment, avec la connoissance qu'on a du signe de la racine, on peut former sur la première équation une autre qui ne soit pas imaginaire.*

133. REPRENONS l'équation $y^3 - py + q = 0$, et supposons que $4p^3 < 27q^2$. Dans ce cas il n'y a qu'une racine réelle, et elle est négative ; je la rends positive en faisant $y = -x$ : donc on a $x^3 - px - q = 0$.

Je fais $x = \frac{q}{p+z}$ . . . . , je fais $p + z = u$.

On a, en substituant dans l'équation transformée les quantités dont on est convenu pour abréger le calcul, $\frac{q^3}{u^3} - \frac{qp}{u} - q = 0 \ldots + q^2 - pu^2 - u^3 = 0$, ou $u^3 + pu^2 - q^2 = 0$ : donc on a $p^3 + 3p^2z + 3pz^2 + z^3 + p^3 + 2p^2z + pz^2 - q^2 = 0$ ; donc $z^3 + 4pz^2 + 5p^2z + 2p^3 - q^2 = 0$ ; ou désignant par $-t$ la quantité connue $2p^3 - q^2$, j'ai $z^3 + 4pz^2 + 5p^2z - t = 0$.

Par la méthode inverse des séries, désignant 5 par $a$, je trouve

$$z = \frac{t}{ap^2} - \frac{4t^2}{a^3p^5} + \frac{27t^3}{a^5p^8} - \frac{220t^4}{a^7p^{11}} + \frac{1979t^5}{a^9p^{14}} - \text{, etc.}$$

Je fais $\frac{t}{a^2p^3}=r$ ; j'aurai

$$z=\frac{t}{5p^2}(1-4r+27r^2-220r^3+1979r^4-18928r^5$$
$$+188772r^6-1940796r^7+20420455r^8$$
$$-234466632r^9+,\ \text{etc.})$$

134. Je réduis en fraction continue, et ensuite en fraction ordinaire, la série qui est après le crochet; j'ai pour fraction continue l'expression suivante :

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{4r}{1+\cfrac{11r}{4+\cfrac{151r}{11+\cfrac{1206r}{151+,\ \text{etc.}}}}}}$$

Les fractions ordinaires qui résultent de cette fraction continue sont les suivantes :

$1^{\circ}.\ \frac{1}{1}\ \ldots\ 2^{\circ}.\ \frac{1}{1+4r}\ \ldots\ 3^{\circ}.\ \frac{4+11r}{4+27r}\ \ldots$

$4^{\circ}.\ \frac{11+68r}{11+112r+151r^2}\ \ldots\ 5^{\circ}.\ \frac{151+1372r+1206r^2}{151+1976r+5033r^2}.$

Les formules que nous venons de déduire des deux séries $1-x+3x^2$, etc., et $1-4r+27r^2$, serviront, dans tous les cas, à faire connoître les premiers chiffres d'une des racines dans l'équation $x^3 \pm px \pm q$. La seconde s'emploie au cas que la première ne présente qu'une quantité imaginaire.

Ces formules donnent, pour la valeur de l'inconnue, plusieurs décimales; elles ont cet avantage, qu'on n'a besoin que de calculer deux for-

mules consécutives, pour être assuré du point précis où il faut s'arrêter pour ne pas s'exposer à l'erreur.

135. Les formules suivantes sont plus générales.

Supposons que l'on ait l'équation

$x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$, etc.; le retour de la série donne $y = \frac{x}{a} - \frac{bx^2}{a^3} + \left(\frac{2b^2 - ac}{a^5}\right)x^3$
$+ \left(\frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}\right)x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\left(\frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}\right)x^5 +$, etc.

La série qui compose le second membre de cette équation, réduite en fraction continue, donne

$$y = x\left(\cfrac{1}{a + \cfrac{bx}{a + \left(b - \cfrac{ac}{b}\right)\cfrac{x}{a}}}\right).$$

136. Les fractions ordinaires qui expriment la valeur de la quantité qui est après le crochet, sont,

$1°.\ \frac{1}{a},\quad 2°.\ \frac{a}{a^2 + bx},\quad 3°.\ \frac{a^2b + (b^2 - ac)x}{a^3b + (2ab^2 - a^2c)x}.$

Nous ne poussons pas plus loin. Lorsqu'on a la valeur de $y$ exprimée par la seconde et troisième fraction, il est plus simple de former, par le moyen de la partie déjà connue de la racine, une autre série qui se traitera comme les autres (*).

(*) On abrége quelquefois plus les calculs en opérant sur la formule de la fraction continue elle-même. On le verra dans la suite par l'application.

137. On pourra faire l'application des dernières formules à l'équation suivante, $y^4+2y^3-36y^2+5y-116=0$, et on verra que les formules précitées peuvent aussi être appliquées aux équations de degré pair, lorsqu'elles ont des racines réelles.

## CHAPITRE VIII.

*Application des méthodes précédentes à quelques exemples.*

138. Soit, 1°. l'équation $y^3-5y+3=0$.

Dans cet exemple, $4p^3$ est plus grand que $27q^2$, et, par conséquent, cette équation a une racine positive : donc la série $\frac{q}{p}+\frac{q^3}{p^4}$, etc., ne renferme point une quantité imaginaire.

Nous n'avons donc qu'à prendre la sommation des premiers termes de cette série, telle qu'elle se trouve dans les formules du n° 126, observant que les puissances impaires de $x=\frac{q^2}{p^3}$ doivent être prises négativement.

Je vais donc calculer les quatrième et cinquième formules; je ne prendrai que les chiffres qui seront communs aux deux quotiens résultans des divisions indiquées par chaque formule. Les formules troisième, quatrième et cinquième, sont

$$\frac{q}{p}\left(\frac{1-2x}{1-3x}\right),\ \frac{q}{p}\left(\frac{2-7x}{2-9x+3x^2}\right),\ \ldots\ldots$$

$$\frac{q}{p}\left(\frac{3-16x+11x^2}{3-19x+21x^2}\right).$$

Dans l'équation donnée, $y^3 - 5y + 3 = 0$, $q^2 = 9$; $p^3 = 125$, $x = 0{,}072$, $x^2 = 0{,}005184$.

Qu'on substitue à la place des indéterminés $\frac{q}{p}$, $x$, $x^2$, leur valeur respective; que l'on opère les deux divisions, on trouvera que le quotient résultant de la troisième formule, est 0,655; celui que l'on a par la quatrième formule, est 0,656. Je prends celui-ci, qui doit être naturellement plus exact; je reviens à l'équation $y^3 - 5y + 3 = 0$. Je fais à présent $y = 0{,}656 + u$; je fais les substitutions convenables; je parviens à cette équation . . . . . . . $+ 0{,}0023004416 = 3{,}708992\, u - 1{,}968\, u^2 - u^3$. Pour connoître $u$, j'emploie la formule du n° 135,

$$y = x \left( \cfrac{1}{a + \cfrac{bx}{a + \text{, etc.}}} \right.$$

Au lieu de calculer $u$ sur les fractions ordinaires, on peut le calculer simplement par les deux premiers termes de la fraction continue, n° 135, de la manière suivante. On commence par prendre le quotient de $\frac{x}{a}$; on multiplie le nombre trouvé par $b$ : comme $b$ est ici négatif, on retranche ce produit du dénominateur $a$. Après avoir opéré la nouvelle division, on a deux valeurs approchées de $u$; on prend les chiffres qui sont communs aux deux quotiens; en effectuant toutes ces opérations, le quotient de la première division est 0,0006202; le quotient de la seconde est 0,0006204; par conséquent, dans l'équation $y^5 - 5y + 3 = 0$,

on a $y=0,6566204$ : ce nombre est exact jusqu'à la septième et dernière décimale, comme on peut le vérifier.

139. Nous allons proposer un autre exemple, où la série, déduite de $y^3-py+q=0$, est imaginaire. Supposons l'exemple suivant, $y^3-2y-5=0$. Dans cet exemple, puisque $4p^3<27q^2$, il y a deux racines imaginaires, et une réelle positive, puisque le dernier terme est négatif. Or, la série du n° 103 donneroit au contraire une valeur négative : donc cette première série est imaginaire. Je dois donc employer la seconde série.

Je fais $y=\frac{q}{p+z}$; je remarque, pour l'application de la seconde série, qu'elle donne, pour l'estimation de $z$, $z=\frac{t}{5p^2}\left(1-4r+27r^2-220r^3\right.$, etc. Or, dans le cas proposé, $q^2-2p^3=t=9$, $\frac{t}{a^2p^3}=0,045=r$, $r^2=0,002025$, $a=5$.

Je calcule la quantité qui est après le crochet, sur les troisième et quatrième fractions ordinaires du n° 134; le calcul donne $\frac{4,495}{5,215}=0,861$, résultat de la première opération; et ensuite on a . . . . . $\frac{14,060}{16,345775}=0,860$, résultat de la seconde opération. Quelque quantité que l'on prenne, on trouve pour $y$, $y=2,094$. Je fais maintenant $y=2,094+z'$. Je substitue cette valeur dans l'équation $y^3-2y-5=0$; j'ai, toutes les opérations faites, . . . .

$-0{,}0061534{,}16+11{,}154508z'+6{,}282z'^2+z'^3=0.$

Je remarque qu'ici le retour de la série donne une quantité positive. Or, cette équation ayant deux racines imaginaires, ayant le signe — à son dernier terme, doit avoir effectivement une racine réelle positive : donc la série ne sera pas imaginaire. Je résous cette équation par la série du n° 135.

$$\frac{x}{a}=\frac{0{,}0061534{,}16}{11{,}154508}=0{,}0005516=z',\ \frac{x\times b}{a}=\ldots$$

0,0034651512 ......................

$$\frac{x}{a+\frac{bx}{a}}=\frac{0{,}0061534160}{11{,}1579731512}=0{,}0005514=z'.$$

En prenant pour $z'$ le quotient de la seconde division, qui doit être le plus exact, on trouve, pour la valeur de $y$ dans l'équation $y^3-2y-5=0$, $y=2{,}0945514$.

On voit la marche qu'il faut tenir pour continuer le calcul, et ajouter de nouvelles décimales à ce nombre.

Il suit de là que si la série $\frac{q}{p}\pm\frac{q^3}{p^4}+\frac{3q^5}{p^7}$, etc., donne une quantité qui soit du signe exigé par le dernier terme de l'équation, alors elle donne toujours le commencement de la valeur de $y$; mais si la série $\frac{q}{p}\pm\frac{q^3}{p^4}$, etc, donne une quantité qui soit de signe contraire que celle qui est exigée par le

dernier terme, elle est imaginaire, et alors il faut, par le changement que nous avons indiqué, la faire revenir à la seconde série.

On pourroit aussi appliquer la méthode des séries aux équations de degrés pairs. Dans ces équations, si toutes les racines sont imaginaires, comme cela arrive quelquefois, alors la série formée sur l'équation donnée est imaginaire. S'il y a des racines réelles, alors la série est ou réelle ou imaginaire : si elle est imaginaire, on pourra toujours la changer en une autre qui ne soit pas imaginaire.

## CHAPITRE IX.

### *Application aux équations du cinquième degré.*

140. Nous avons vu que toute équation de degré impair a au moins une racine réelle; nous allons à présent démontrer que toute équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme; car ce dernier terme D peut être regardé comme composé de deux facteurs $a$ A, comprenant le premier $a$ l'une des racines, et l'autre A le produit des quatre autres racines. Cela posé, je dis que le dernier terme D étant positif, il y a une racine réelle négative, et le dernier terme D étant négatif, il y a une racine réelle positive dans l'équation.

On prouve ainsi la première partie. Le dernier terme positif ne peut provenir que de $+a \times + A$,

auquel cas il y a une racine négative, ou il résulte de $-a\times-$ A. Or, alors l'équation dont $-$ A est le dernier terme, a nécessairement une racine réelle négative; car toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, puisque le produit réel de radicaux imaginaires, qui font alors partie des deux polynômes multipliés l'un par l'autre; ce produit, dis-je, ayant son dernier terme négatif, un des polynômes a nécessairement son dernier terme négatif, et par conséquent ses deux racines réelles; et une de ces racines réelles est négative, celle à savoir qui renferme le radical négatif: donc, etc.

Le dernier terme étant négatif, il y a une racine réelle positive; car alors le facteur $a$ ou le facteur A est négatif. Or, dans toute supposition, il suit de ce que nous venons de dire qu'il y a une racine réelle positive.

On peut dire la même chose de toute équation de degré impair : donc le dernier terme étant $\pm d$, on peut de suite faire $x=\mp\frac{d}{c}$.

141. Cela posé, soit l'équation suivante :

$$1^{o}.\ y^5+2y^4-2y^3-16y^2-27y-18=0;$$
$$\text{ou } y^5+2y^4-2y^3-16y^2-27y=18.$$

Je fais les substitutions convenables dans la formule du n° 136; je prends la seconde fraction $y=x\left(\frac{a}{a^2+bx}\right.$, j'ai $x=18$, $a=-27$, $b=-16$: donc l'application donne, pour l'équation proposée,

$y = +18 \left( \frac{-27}{27^2 - 16.18} \right.$ ; et après les opérations faites, on devroit avoir $y = -1$ ; mais comme, suivant les principes posés immédiatement ci-dessus, $y$ doit être positif, et que la série peut être imaginaire (*), il s'ensuit qu'il est plus sûr de prendre le premier approchement en plus; et effectivement, en essayant $+1+2+3$, et les substituant à la place de $y$ dans l'équation proposée, la substitution de $+2$ et $+3$ donne des résultats de signes contraires.

Je fais à présent $y = 2 + z$ : le supplément $z$ sera une fraction, puisque la véritable valeur se trouve entre $+2$ et $+3$.

Je substitue cette valeur de $y$ dans l'équation proposée, et, tous les calculs faits, je trouve pour $z$ cette équation,

2°. $z^5 + 12z^4 + 54z^3 + 100z^2 + 29z = 88$.

Pour déterminer $z$, je fais les substitutions con-

---

(*) Le signe —, qui se trouve ici avant la première valeur approchée que donne pour $y$ le retour de la série, fait voir que la série est imaginaire; car si $-1$ est la véritable valeur approchée de $y$, la quantité $-1$, et une autre quantité négative plus grande ou moindre que $-1$, substituées successivement dans l'équation, donneroient des résultats de signes contraires. Or, on n'en trouve point; car soit qu'on substitue $-0{,}9$, $-0{,}8$, etc., ou $-2$, $-3$, $-4$, etc., $-10$, on ne trouve que des résultats de même signe; au lieu qu'en substituant $+1+10$, on trouve des résultats de signes contraires: donc ces deux nombres sont les limites entre lesquelles se trouve la racine cherchée.

venables dans la formule du n° 136. La première fraction ordinaire me donne $z = 3$, et la seconde fraction ordinaire me donne $z = 0,2$. Les limites de 3 à 0,2 étant très-éloignées, ne me font point connoître la valeur de $z$; mais la série inverse à l'équation deuxième devant avoir ses termes alternativement positifs et négatifs, les fractions ordinaires qui en expriment la valeur sont alternativement trop grandes et trop petites. Il s'ensuit que $+0,3$ étant trop petit, on n'a besoin que d'essayer dans la substitution $+0,3$, $+0,4$, $+0,5$, $+0,6$, $+0,7$, etc. : pour s'assurer même que l'on ne doit essayer que ces nombres, on n'a besoin que de se rappeler que $z$ doit être une fraction. La substitution de $+0,6$ et celle de $+0,7$ donnent des résultats de signes contraires : on a donc $z = 0,6$. Je fais $z = 0,6 + z'$. Puisque la véritable valeur de $z$ est entre 0,6 et 0,7, il s'ensuit que $z'$ doit être une fraction de dixième. Je fais par rapport à $z'$ ce que j'ai fait par rapport à $z$; je trouve cette nouvelle série, qui est plus convergente,

$$2^{\circ}.\ z'^5 + 15,0\,z'^4 + 86,40\,z'^3 + 225,280\,z'^2 + 218,3360\,z' - 21,30304 = 0.$$

Puisque $z'$ est une fraction de dixième, il est évident qu'on ne doit essayer que des centièmes; mais pour faire cet essai sans tâtonnement, j'observe que la première fraction ordinaire de la formule du n° 136 me donne $z' = 0,09$. Cette quantité est trop grande, puisque les termes de la série inverse sont ici alternativement positifs et négatifs : j'essaye

donc 0,9 et 0,8, et je trouve deux résultats de signes contraires.

A présent je fais $z' = 0,08 + z''$.

En opérant les substitutions qui résultent de cette supposition, on trouve pour $z''$ cette nouvelle série,

$$4°.\ z''^5 + 15,4z''^4 + 91,264z''^3 + 246,59712z''^2 + 256,0706048z'' - 2,3495135232 = 0.$$

Comme ici tous les termes de la série sont en plus, les termes de la série inverse seront alternativement positifs et négatifs, et par conséquent les formules des nos 135 et 136 donneront les limites entre lesquelles se trouve l'inconnue.

En s'arrêtant à la première formule du n° 135, on a $z'' = 0,00917$; en s'arrêtant à la seconde, $z'' = 0,00909$; en s'arrêtant à la troisième, $z'' = 0,00909$. Or, les mêmes chiffres qui sont communs à la trop grande et à la trop petite valeur d'une inconnue, font nécessairement partie du nombre qui exprime cette racine : donc $y = 2,68909$, etc.

142. Remarquez que pour avoir les deux valeurs $z'' = 0,00917$ et $z'' = 0,00909$, on peut les calculer plus brièvement sur la fraction continue elle-même, qui précède immédiatement le n° 136, au lieu d'employer les formules des fractions ordinaires, qui se trouvent dans ce numéro, et opérer de la manière suivante :

1°. On divise $x$ par $a$; 2°. on multiplie le quotient trouvé par $b$, ce qui donne $\frac{bx}{a}$; on ajoute

ce produit au premier dénominateur $a$; on opère une nouvelle division, dont le quotient donne la seconde valeur de $z''$.

Pour avoir la troisième valeur de $z''$, on peut remarquer que la troisième formule du n° 136 est $x\left(\frac{a^2b+(b^2-ac)x}{a^3b+(2ab^2-a^2c)x}\right)$, et par conséquent elle devient $\frac{x}{a}\left(\frac{a^2b+(b^2-ac)x}{a^2b+(2b^2-ac)x}\right)$.

En faisant les opérations indiquées par cette nouvelle formule, les calculs sont moins longs, parce que $\frac{x}{a}$ est déjà connue.

On voit à présent ce qu'il faudroit faire pour ajouter de nouvelles décimales à celles qu'on a déjà trouvées pour $y$.

143. Toutes les séries où il n'y a point de variations de signes, ne peuvent être imaginaires : telles sont les séries qui ont donné, dans l'exemple précédent, les divers supplémens de $y$. En général, lorsque la série présente le même signe que celui que doit avoir la racine, et qui est toujours connu, la série n'est point imaginaire.

144. Lorsqu'une équation du cinquième degré a plusieurs racines réelles, elle peut en avoir au-dessous de l'unité et au-dessus. S'il y a dans ces sortes d'équations une racine au-dessous de l'unité, elle se découvre facilement. En effet, il n'y a qu'à faire l'essai très-court des quantités $+0$, $+1$ ; si l'on trouve des résultats de signes contraires, il

y a une racine réelle positive au-dessous de l'unité; si la substitution des quantités $+0$, $+1$ ne donnent pas des résultats de signes contraires, substituez $-0$, $-1$; et alors, s'il paroit des résultats de signes contraires, il y a dans l'équation une racine négative au-dessous de l'unité.

Si la substitution de $+0$, $+1$, ou celle de $-0$, $-1$, ne donnent point des résultats de signes contraires, c'est une preuve qu'il n'y a point ou qu'il y a dans l'équation plusieurs racines réelles égales au-dessous de l'unité. Dans ce dernier cas, on observe des règles particulières. Nous ne les mettrons pas ici : si notre essai est accueilli, nous l'augmenterons de cet article et de plusieurs autres.

On peut aussi trouver le chiffre en nombre entier qui doit être le premier dans les autres racines positives ou négatives, en substituant les nombres $+1$, $+2$, $+3$, etc., ensuite les nombres $-1$, $-2$, $-3$, etc. Quand on calcule une des racines réelles d'une équation du cinquième degré, il faut tomber, autant qu'on le peut, à la plus petite, pour abréger le calcul; c'est à cela que conduit la première observation. Cela posé,

145. Soit l'exemple suivant :

$$y^5-2y^4-3y^3+13y^2-16y+6=0.$$

J'applique la formule qui termine le n° 135. En prenant le premier terme de cette formule, j'ai $y=0,3$; appliquant ce que nous avons dit dans le numéro précédent, nous trouvons que $y$ a effectivement une racine positive au-dessous de l'unité.

Je prends les deux premiers termes de la formule du n° 135; j'ai $y = 0{,}5$; je substitue dans l'équation $+0{,}5$ . . . . . $+0{,}6$ . . . . $+0{,}7$ . . . . . Je trouve que les deux substitutions de $+0{,}6$ et de $+0{,}7$ donnent un résultat de signes contraires : donc, dans cette équation, il y a une racine qui se trouve entre 0,6 et 0,7, ou $y = 0{,}6 + z$. Je substitue cette première valeur de $y$ dans l'équation donnée. Toutes les opérations faites, on voit paroître la nouvelle équation suivante :

$$z^5 + z^4 - 4{,}2z^3 + 5{,}44z^2 - 4{,}72z + 0{,}25056 = 0.$$

J'applique à cette nouvelle équation la formule du n° 136. Soit que je prenne simplement le premier terme, soit que je calcule $z$ sur les deux premiers termes, je trouve $z = 0{,}05$; d'où je conclus que 0,05 est un chiffre qui entre dans la valeur de $z$; et en effet, en substituant dans l'équation en $z$, successivement $+0{,}05$ et $+0{,}06$, on trouve deux résultats de signes contraires. Je fais maintenant $z = 0{,}05 + u$; après les substitutions faites dans la dernière équation $z^5$, etc., elle est transformée dans la suivante :

$$u^5 + 1{,}25u^4 - 3{,}975u^3 + 4{,}82625u^2 - 4{,}20696875u + 0{,}0276415625 = 0.$$

En prenant le premier terme de la formule du n° 136, on trouve $u = 0.0065$. En prenant les deux premiers termes, on trouve $u = 0{,}0066$; je prends cette dernière valeur comme étant la plus approchée. En formant une autre équation, on trouvera un autre supplément égal à 0,000017; d'où $y = 0{,}656617$.

On auroit pu décomposer l'équation dans les deux suivantes, $y^3-5y+3=0$ et $y^2-2y+2=0$; mais cette décomposition le plus souvent ne peut être faite que par des calculs bien plus laborieux que ceux que nous venons de faire.

Si l'on vouloit employer l'équation aux différences, pour calculer une équation du cinquième degré, on tomberoit dans des calculs qui seroient communément au-dessus des efforts ordinaires de l'esprit.

146. Lorsqu'on calcule une des racines réelles d'une équation du cinquième degré, et qu'on la détermine, comme nous venons de le faire, en formant différentes équations considérées comme série; si on trouve que cette racine est négative, il faut la rendre positive en changeant les signes des termes où $y$ est élevé à une puissance impaire; par ce moyen, puisqu'on n'admet à chaque supplément que le chiffre que l'on reconnoît, par les règles données, entrer dans la racine, il s'ensuit que chaque supplément $z$, $z'$, $z''$, etc., sera positif; et la conformité du signe $+$ avec celui que présentera la série, sera une preuve qu'elle n'est pas imaginaire.

147. La racine réelle que l'on cherche étant positive, si parmi les équations qui y conduisent par degré, il s'en trouve dont les premier et dernier termes soient de même signe, alors, outre la racine cherchée, il y en a deux autres réelles. En effet, dans ce cas, ces équations ayant le

signe + à leurs premier et dernier termes, l'équation du quatrième degré, qui y est comprise, a son dernier terme négatif. Or, nous avons observé que toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles.

148. Si la somme des carrés ou celle des quatrièmes puissances des racines d'une équation du cinquième degré est négative, alors l'équation a nécessairement des racines imaginaires. On voit dans le tableau suivant la somme des premières puissances, celle des carrés, celle des troisièmes puissances, etc., des cinq racines de l'équation $x^5+ex^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$.

$$x+y+z+m+n=-e.$$
$$x^2+y^2+z^2+m^2+n^2=e^2-2a.$$
$$x^3+y^3+z^3, \text{ etc.} =-e^3+3ae-3b.$$
$$x^4+y^4, \text{ etc.} =e^4-4ae^2+4be+2a^2-4c.$$
$$x^5+y^5, \text{ etc.} =-e^5+5ae^3-5be^2+5ce$$
$$-5a^2e+5ab-5d.$$

Je ne mets point ici, pour éviter la longueur, la démonstration de toutes les vérités comprises dans ces équations; je me contente de dire en peu de mots comment on y parvient. On suppose l'équation du cinquième degré décomposée dans les trois suivantes : $x^2+px+r=0$ . . . . . . . . $x^2+qx+s=0$ . . . . . $x+e-p-q=0$. On multiplie ces trois équations indéterminées, les unes par les autres; on a une équation qu'on égale à la primitive, terme par terme; on forme quatre nouvelles équations, par le moyen desquelles on démontre toutes les expressions ci-dessus, de la

même manière qu'on le fait pour le cas où la somme des racines égale à zéro.

149. D'après toutes ces notions, on peut quelquefois déterminer si dans une équation du cinquième degré il y a plus d'une racine réelle, et s'il y en a d'imaginaires; mais pour connoître, dans tous les cas, combien il y en a de l'une et de l'autre espèce, la méthode la plus simple est d'abaisser l'équation donnée à une équation du quatrième degré; ce qui s'effectue en divisant l'équation proposée par la racine trouvée.

Prenons donc l'équation $x^5+ex^4+ax^3+bx^2+cx-d=0$. Supposons que l'on connoisse un des facteurs $x-m=0$ de cette équation; en opérant la division, on trouve :

$$\begin{matrix} & [f] & & [g] & & [h] \end{matrix}$$

$$x^4 \left.\begin{matrix}+e\\+m\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}+a\\+em\\+m^2\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}+b\\+am\\+em^2\\+m^3\end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix}+c\\+bm\\+am^2\\+em^3\\+m^4\end{matrix}\right\} = 0.$$

On peut former les coefficiens de cette nouvelle équation par la multiplication, de la manière suivante : Ajoutez la racine trouvée à la quantité qui forme le coefficient du second terme de la proposée, vous avez le coefficient du second terme de l'équation abaissée; multipliez ce coefficient par $m$,

ajoutez-y la quantité $a$, coefficient du troisième terme de la proposée, vous avez le coefficient du troisième terme de l'équation abaissée, etc.

On peut encore les former par la division; car il est évident qu'appelant $f$, $g$, $h$, les coefficiens des trois derniers termes, j'ai cette suite d'équations, $h=\frac{d}{m}$ .... $g=\frac{h-c}{m}$ .... $f=\frac{g-b}{m}$. Ces opérations seront très-faciles à exécuter par le moyen des logarithmes.

FIN.





# TABLE.

PRÉFACE. Page v

PREMIÈRE PARTIE.

Résolutions des équations des degrés supérieurs, par les voies ordinaires de l'analise.

CHAP. I^er. *Equation du second degré.* 1

CHAP. II. *Equation du troisième degré.* 4

CHAP. III. *Equation du quatrième degré.* 29

CHAP. IV. *Equation du cinquième degré.* 40

SECONDE PARTIE.

Résolution des équations par les séries.

CHAP. I^er. *Notions sur les séries; usage des coefficiens indéterminés, pour la méthode directe des séries.* 51

CHAP. II. *Usage des coefficiens indéterminés, pour la méthode inverse des séries.* 56

CHAP. III. *Sommation des carrés, des cubes et autres puissances des termes d'une progression arithmétique quelconque.* 59

CHAP. IV. *Développement des termes de la*

*série équivalente à l'expression* $\overline{1+x}^n$. Page 63

Chap. V. *Application de la série du binôme à la formation de nouvelles séries par lesquelles on résout plusieurs questions trigonométriques.* 71

Chap. VI. *Usage des coefficiens indéterminés, pour le calcul des lignes trigonométriques.* 82

Chap. VII. *Usage des séries, pour résoudre les équations du troisième degré.* 87

## TROISIÈME PARTIE.

### Des fractions continues.

Chap. I[er]. *Premières notions sur les fractions continues : leur réduction à des fractions ordinaires.* 96

Chap. II. *Méthode des analistes, pour transformer une fraction continue en série.* 101

Chap. III. *Transformation d'une série ordinaire en fraction continue.* 104

Chap. IV. *Nouvelle méthode pour transformer les séries en fractions continues : formules très-utiles qu'on en déduit.* 109

Chap. V. *Usage des formules précédentes.* 116

Chap. VI. *Séries imaginaires.* 118

Chap. VII. *Manière de procéder quand la série est imaginaire, et comment, avec la connoissance qu'on a du signe de la racine,*

*on peut former sur la première équation une autre qui ne soit pas imaginaire.* Page 119

Chap. VIII. *Application des méthodes précédentes à quelques exemples.* 122

Chap. IX. *Application aux équations du cinquième degré.* 126

FIN DE LA TABLE.




BIBLIOTECA